9 класс. Задача 1.

Перейдем в систему отсчета, двигающуюся со скоростью $\vec{u}$, в которой подъемник неподвижен. В этой системе отсчета папка, выпав из кармана Бонда, просто падает вниз вертикально. Так как по условию в результате удара о склон папка остановилась, в нашей системе отчета в момент удара она приобретает начальную скорость равную u, направленную вниз по склону.

Так как трения нет, на папку действует только сила тяжести. Тогда в проекции на склон (см. рис. 1) второй закон Ньютона будет выглядеть так:

$$m\,g\sin\alpha = ma,$$

где a - ускорение с которым папка начинает двигаться вниз вдоль склона, выразим его:

$$a = g\sin\alpha.$$

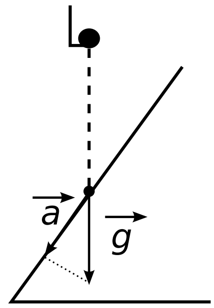

Рис. 1.

Таким образом, путь, который проходит папка за время t по склону запишется как $s = ut + g\,sin\alpha\,t^2/2$. Чтобы Агент 007 поймал папку при приземлении его вертикальная и горизонтальная координаты должны совпасть с координатами папки (размерами Бонда и папки мы пренебрегаем). То есть, по горизонтальной оси OX (см. рис. 2) расстояние, пройденное Бондом должно равняться расстоянию, пройденному папкой:

$$3ut = (ut + \frac{1}{2}g\sin\alpha\,t^2)\,\cos\alpha,$$

где t - время полета. Из этого условия после несложных превращений получаем:

$$(3-\cos\alpha)u = \frac{1}{2}\sin\alpha\;\cos\alpha\,t. \qquad (1)$$

Вспомним, что уголь $\alpha = 60^o$, тогда подставим в выражение (1) $cos\,\alpha = 1/2$ и $sin\,\alpha = \sqrt{3}/2$, и получим ответ для времени полета Бонда:

$$t = \frac{20}{\sqrt{3}}\frac{u}{g}.$$

Теперь второе условие: расстояние, пройденное агентом по вертикальной оси OY, должно быть равен сумме высоты h и расстояния, пройденного папкой по вертикали (см. рис. 2):

$$\frac{1}{2}gt^2 = h + (ut + g\,sin\alpha\,t^2/2)\sin\,\alpha,$$

Осталось выразить h и подставить полученное выражение для времени полета, а так же значения $sin\,\alpha$. После несложных упрощений выражаем высоту, на которой висят кресла подъемника:

$$h = \frac{20}{3}\frac{u^2}{g}.$$

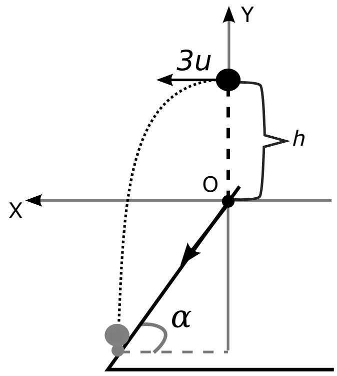

Рис. 2.

Ответ: Время полета Бонда равно $t = 20\,u/(\sqrt{3}g)$, высота на которой висят кресла подъемника $h = 20\,u^2/(3g)$.

9 класс. Задача 2.

Пронумеруем вагончики так, как показано на рисунке 3. Обозначим неизвестную силу через F, массы вагончиков через m.

Поскольку трением можно пренебречь, вся работа силы F идет на сообщение вагончикам кинетической энергии. Следовательно, для того чтобы дать ответ на вопрос задачи, достаточно понять, как относятся конечные кинетические энергии каждого из вагончиков к полной работе силы, т. е. к сумме их кинетических энергий. Займемся вычислением этих величин.

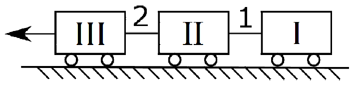

Рис. 3.

На первом этапе сила F разгоняла сразу три вагончика. Следовательно, из второго закона Ньютона получаем, что вагончики двигались с ускорением $a_{(3)} = F/3m$. Отсюда сразу находим скорость вагончика под номером I к моменту времени t

$$V_{\mathrm{I}} = a_{(3)}t = \frac{Ft}{3m}.$$

Таким образом, его конечная кинетическая энергия равна

$$E_{\mathrm{I}} = \frac{mV_{\mathrm{I}}^2}{2} = \frac{F^2t^2}{18m}. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь второй этап. Так как нить под номером 1 порвалась, сила F разгоняет теперь только два вагончика. Для ускорения системы имеем: $a_{(2)} = F/2m$. Следовательно, скорость второго вагончика к моменту времени $2t$ будет равна

$$V_{\mathrm{II}} = a_{(3)}t + a_{(2)}t = \frac{Ft}{3m} + \frac{Ft}{2m} = \frac{5Ft}{6m}.$$

А его конечная кинетическая энергия составит

$$E_{\mathrm{II}} = \frac{mV_{\mathrm{II}}^2}{2} = \frac{25F^2t^2}{72m}. \tag{3}$$

На третьем этапе сила разгоняет всего один вагончик, его ускорение равно $a_{(1)} = F/m$, а скорость к моменту времени $3t$ будет

$$V_{\mathrm{III}} = a_{(3)}t + a_{(2)}t + a_{(1)}t = \frac{Ft}{3m} + \frac{Ft}{2m} + \frac{Ft}{m} = \frac{11Ft}{6m}.$$

Отсюда сразу находим кинетическую энергию третьего вагончика в концу разгона:

$$E_{\mathrm{III}} = \frac{mV_{\mathrm{III}}^2}{2} = \frac{121F^2t^2}{72m}. \tag{4}$$

Используя формулы (2)–(4), определяем полную работу силы F:

$$A = E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}} + E_{\mathrm{III}} = \frac{25F^2t^2}{12m}.$$

Наконец, находим искомые доли от всей работы силы F, которые пошли на разгон каждого из вагончиков

$$\eta_{\mathrm{I}} = \frac{E_{\mathrm{I}}}{A} = \frac{2}{75} \approx 2,7\,\% \qquad \eta_{\mathrm{II}} = \frac{E_{\mathrm{II}}}{A} = \frac{1}{6} \approx 16,7\,\% \qquad \eta_{\mathrm{III}} = \frac{E_{\mathrm{III}}}{A} = \frac{121}{150} \approx 80,7\,\%$$

Ответ: На разгон первого вагончика I пошло приблизительно 2,7 % от всей работы силы, на разгон вагончика под номером II — приблизительно 16,7 %, на разгон последнего — приблизительно 80,7 %.

9 класс. Задача 3.

Всего имеется девять различных способов собрать “случайный резистор”. Однако среди них есть схемы, переходящие друг в друга простым отражением. Все возможные различные (с учетом отражений) конструкции изображены на рисунке 4.

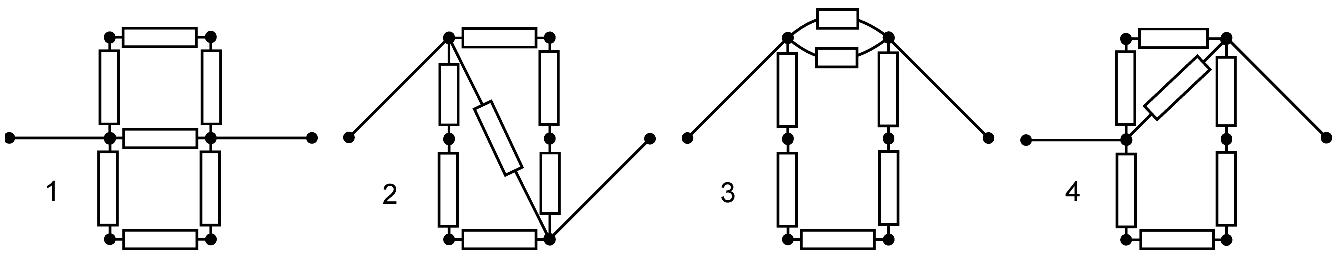

Рис. 4.

В числе всех 9 возможных “случайный резисторов” имеется ровно одна конструкция типа **1**, две конструкции типа **2**, две – типа **3** и четыре – типа **4**. Поскольку “случайные резисторы” выбираются равновероятно, из 1155 собранных “случайных резисторов”, скорее всего 1/9 часть будет принадлежать к типу **1**, 2/9 – к типу **2**, 2/9 – к типу **3** и 4/9 – к типу **4**.

Рассчитаем сопротивление каждой схемы. Нетрудно заметить, что схемы **1** и **2** полностью эквивалентны и их сопротивления равны. Тогда получим:

$$R_{1/2} = \frac{3}{5}\,\text{Ом}, \qquad R_3 = \frac{5}{11}\,\text{Ом}, \qquad R_4 = \frac{4}{7}\,\text{Ом}.$$

Резисторы соединены последовательно, следовательно их сопротивления складываются. Это значит, что суммарное сопротивление будет равно:

$$R = 1155\left(\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)R_{1/2}+\frac{2}{9}R_3+\frac{4}{9}R_4\right) = 641\,\text{Ом}.$$

<u>Ответ:</u> Наиболее вероятное сопротивление получившейся цепи равно 641 Ом.

9 класс. Задача 4.

Показания весов меняются с началом движения столбика ртути, потому что меняется импульс ртутного столбика - все большая масса начинает двигаться вверх. Чтобы это понять для начала введем обозначения: удельная теплоемкость ртути C, ее плотность ρ, масса всей ртути в градуснике m, а общий объем V. Площадь поперечного сечения столбика ртути s, а скорость с которой он ползет вверх v. Понятно, что если ртуть поглощает 500 Дж в секунду, то поглощаемая ею мощность N равна 500 Вт.

В условии задачи дана формула для изменения объема:

$$\Delta V = \beta V \Delta T. \tag{5}$$

Так же в условии сказано, что изменение объема ртути ΔV много меньше ее общего объема, значит мы можем считать что что объем ртути V в формуле (5) - всегда ее начальный объем. Таким образом, плотность ртути тоже почти не меняется во время Васиного эксперимента, так как масса ртути в градуснике постоянна. То есть везде в формулах ρ - плотность при комнатной температуре.

С учетом равенства $m = \rho V$, уравнение теплового баланса для ртути за время Δt будет выглядеть так:

$$C\rho\, V\, \Delta T = N\Delta t,$$

где ΔT - изменение температуры за этот промежуток времени. Выразим ΔT:

$$\Delta T = \frac{N}{C\rho V}\Delta t,$$

Теперь подставим полученное ΔT в формулу для расширения ртути (5):

$$\Delta V = \frac{\beta V N}{C\rho V}\Delta t,$$

откуда сократив множитель V и перекинув Δt в левую часть получаем уравнение для скорости изменения объема ртути:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\beta N}{C\rho}. \tag{6}$$

Изменение объема ртути приводит к тому, что столбик градусника ползет вверх, то есть изменение объема $\Delta V = \Delta h\, s$, где Δh - изменение высоты столбика. Значит скорость с которой двигается столбик будет равна:

$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{s}\frac{\Delta V}{\Delta t}. \tag{7}$$

Заметим, что так как скорость изменения объема в (6) не зависит от времени, то скорость подъема ртути в (7) тоже постоянна.

Понятно, что при выключении нагрева сила тяжести не меняется, но меняется импульс (p) движущейся в столбике ртути. То есть кроме силы тяжести на весы начинает действовать дополнительная сила (F), найти которую мы можем по втором закону Ньютона в импульсной форме:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Так как скорость подъема ртути в столбике постоянная, изменение импульса можно выразить так $\Delta p = \Delta m\, v = \rho\, \Delta V\, v$. Тогда выражение для силы запишется так:

$$F = \rho v \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Подставим сюда выражения для скорости изменения объема из (6) и v из (7):

$$F = \frac{\rho\, \beta^2 N^2}{s\, C^2\, \rho^2} = \frac{\beta^2 N^2}{s\, C^2\, \rho}.$$

Теперь, подставляя числа, получаем дополнительную силу равную:

$$F \approx 3 \cdot 10^{-5} H.$$

Чтобы перевести эту дополнительную силу в прибавку к массе, которую показали весы, нужно разделить силу на ускорение свободного падения:

$$\Delta m = \frac{F}{g} \approx 3,1 \cdot 10^{-6}\text{кг}.$$

<u>Ответ:</u> Показания весов увеличатся на $3,1 \cdot 10^{-6}$кг.

9 класс. Задача 5.

Пусть T - сила натяжения ленты, F - сила трения между цилиндром и поверхностью, a - поступательное ускорение цилиндра, M - масса одного колеса, m - масса груза, отношение масс обозначим за $\alpha = M/m$. Заметим, что ускорение груза равняется $2a$, поскольку за любой промежуток времени удлинение вертикального куска ленты равняется удвоенному сокращению одного из горизонтальных кусков (полная длина ленты остается неизменной). Запишем второй закон Ньютона для обоих тел - колесной пары и груза:

$$2M\,a = 2T - F, \qquad 2m\,a = m\,g - T.$$

Здесь учтено, что масса колесной пары равняется $2M$.

Далее рассмотрим вращательное движение колес. Предположим, что они не проскальзывают. При качении без проскальзывания скорость нижней точки колеса равна нулю. Перейдем в систему отсчета, в которой ось колесной пары неподвижна. В этой системе отсчета скорость нижней точки равна по величине скорости поступательного движения оси в системе отсчета "земля". Поскольку в выбранной системе отсчета колеса движутся только вращательно, то скорости всех точек на их ободе имеют ту же величину. Следовательно равны между собой ускорение поступательного движения оси в системе отсчета "земля"(a) и ускорение вращательного движения точек на ободе в системе отсчета "ось". Найдем связь этого ускорения с величиной сил, действующих на колесную пару. Поскольку трение ленты об ось отсутствует, силы натяжения ленты не влияют на вращательное движение колес. Единственная сила, влияющая на вращение - это сила трения. Мысленно развернем обод колес на плоскость (см. рис. 6). Поскольку ускорение всех точек на ободе равно a, полученная система представляет из себя две однородные полосы суммарной массы $2M$, движущиеся горизонтально с ускорением a под действием силы трения F. Из этого следует простое соотношение:

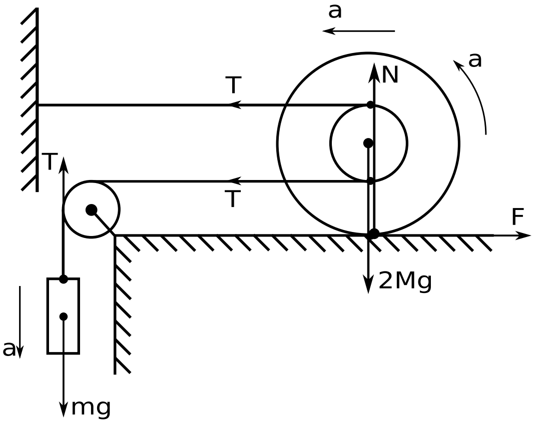

Рис. 5.

$$F = 2M\,a.$$

С помощью этого соотношения и уравнений из закона Ньютона, находим ускорение колесной пары:

$$a = \frac{m}{2\,(M+m)}\,g = \frac{g}{2}\,\frac{1}{1+\alpha}.$$

Теперь определим, когда начнется проскальзывание. Оно начинается, когда сила трения достигает своего максимального значения $F_{max} = \mu\,N$. Сила реакции опоры в нашем случае просто равняется $2M\,g$. Пользуясь найденными выражениями для a и F, получим:

$$\frac{F}{N} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\alpha}.$$

Заметим, что дробь $1/(1+\alpha)$ не превышает 1 ни при каком α. Следовательно, F/N не превышает $1/2$. Таким образом, если $\mu \geq 1/2$ проскальзывания не будет ни при каком α.

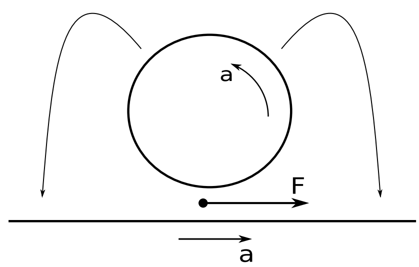

Рис. 6.

<u>Ответ:</u> Проскальзывания не будет при любом соотношении масс колеса и груза, если коэффициент трения $\mu \geq 1/2$.