Районный тур 2013. 8 класс. I вариант

Задача 1.

Рассмотрим сначала цельные дубовые кубы. Обозначим длину ребра куба за a. Тогда объём куба будет равен $V = a^3$, масса $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$. Площадь нижней (как и любой другой) грани куба при этом будет равна $S = a^2$, откуда мы можем непосредственно узнать давление на поверхность:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho a^3 g}{a^2} = \rho a g$$

Отсюда можем сделать вывод: при увеличении размера куба давление увеличивается. Осталось лишь найти такое a, при котором давление сравняется с тем, которое может выдержать лёд. Тогда все кубы меньшего размера ставить на лёд будет безопасного, а большего - не стоит.

$$\rho a g = P_{max} \Rightarrow a = \frac{P_{max}}{\rho g} = \frac{10^4 \text{ Па}}{700 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг}} \approx 1,43 \text{ м}$$

Теперь рассмотрим полые кубы. Также обозначая длину ребра куба за a, сразу напишем выражение для массы. Каркас состоит из 12 рёбер, каждое длиной a, что даст нам $m = 12 \cdot \rho_l a$, где ρ_l - линейная плотность трубы. Обратите внимание, a в выражение для массы входит уже не в 3й, как для случая цельных кубов, а в первой степени! С этим и будет связан иной качественный результат для этого вида кубов. Написав выражение для давления,

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{12\rho_l a g}{a^2} = \frac{12\rho_l g}{a}$$

Увидим, что при увеличении размера куба его давление на поверхность уменьшается! Опять-таки, найдём критическое a, начиная с которого такие кубы будет безопасно ставить на лёд.

$$\frac{12\rho_l g}{a} = P_{max} \Rightarrow a = \frac{12\rho_l g}{P_{max}} = \frac{12 \cdot 50 \text{ кг/м} \cdot 10 \text{ Н/кг}}{10^4 \text{ Па}} \approx 0,6 \text{ м}$$

<u>Ответ:</u> Цельные кубы безопасно ставить на лёд, если их сторона меньше $1,43$ м; полые - если их сторона больше $0,6$ м

Задача 2.

В случае, когда центр шестерни (обозначим его O) неподвижен, он всегда будет оставаться центром отрезка AB - это видно из симметрии системы. Также это можно понять из того, что рейка a смещается на столько же зубцов, что и рейка b. Аналогичный вывод верен и при движении точки O: для наблюдателя, всегда находящегося над точкой O, всё будет выглядеть точно так же, как описано в предыдущем пункте.

Таким образом, забываем теперь о рейках и шестерне, и можем думать о задаче в упрощенном виде: точка O - всегда середина отрезка AB, хотя длина последнего может меняться. По условию один конец этого отрезка движется по горизонтальной прямой - обозначим ее m, другой по вертикальной (на рисунке) прямой - обозначим ее n.

Выберем оси координат совпадающими с прямыми m и n. Заметим: O - центр AB, следовательно, и по каждой из осей O находится посередине между A и B. Но по каждой из выбранных нами осей один из концов AB не меняет положения, а значит O движется с половинной скоростью другого конца. Таким образом, O будет двигаться по прямой, и её горизонтальная скорость будет равняться $V_a/2$, а вертикальная - $V_b/2$.

Задача 3.

Заметим: когда Петя кладёт кольцо на стакан, масса всей конструкции увеличивается на $m = 275$ г. Соответственно, объём части конструкции, находящейся под водой, должен также увеличится на $V = m/\rho = 275$ см^3. Учитывая площадь основания стакана $S = 100$ см^2, получается, что в момент докладывания на стакан очередного кольца конструкция проседает вниз на $2,75$ см. Вместе с тем, кольцо увеличивает её высоту на 2 см. Итого, верхняя кромка стакана при докладывании каждого кольца опускается на $0,75$ см вниз. Конструкция утонет ровно тогда, когда её верхняя кромка окажется ниже поверхности воды и она начнёт набирать воду. Изначально конструкция возвышается над водой на 4 см, значит, это произойдёт при докладывании 6го кольца. $(6 \cdot 0,75 = 4,5 > 4)$.

<u>Ответ:</u> Конструкция утонет сразу после докладывания на неё 6го кольца.

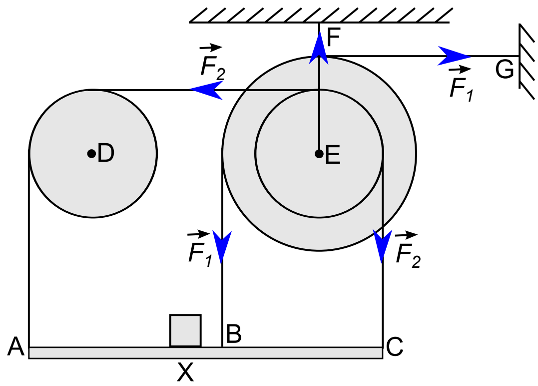
Задача 4.

Рассмотрим следующую величину: количество теплоты, которое нужно сообщить системе, чтобы нагреть её до $T = 100^o$С, т.е. довести воду в ней до кипения. Назовём эту величину Q_-. В начальный момент, когда система состоит только из воды, $Q_{-_0} = (100-95)\cdot 8400 = 42$ кДж. Каждый пельмень, который докидывают в кастрюлю, увеличивает Q_- на $E_\text{П} = 0,02\cdot 3\cdot 100 = 6$ кДж. (Т.к. теперь нам нужно нагреть до 100^oC целый лишний пельмень, а на его нагревание должно уйти ровно столько теплоты). При этом за период времени длины τ (от закидывания одного пельменя до закидывания следующего) в систему от плиты поступает энергия $E_+ = P\cdot\tau$. Ясно, что для того, чтобы у воды вообще были шансы закипеть, E_+ должна быть больше 6 кДж. Также заметим следующее: если между закидыванием каких-то двух пельменей вода закипела, то между закидыванием следующих она также закипит. Действительно: если она закипела, то во-первых $E_+ > 6$ кДж, а во-вторых, в момент закипания Q_- станет равной нулю. Тогда в момент закидывания следующего пельменя Q_- станет равной 6 кДж. Но $E_+ > 6$ кДж, т.е. плита за следующий промежуток времени сумеет передать достаточное количество теплоты, следовательно, момент кипения настанет вновь.

Таким образом, осталось лишь определить первый момент, в который закипит вода. Ответим сначала на вопрос задачи при $\tau = 10$ с. Тогда $E_+ = 15$кДж. В конце 4го промежутка времени τ (прямо перед закидыванием пятой пельмешки) $Q_- = 42 + 4\cdot 6 - 4\cdot 15 = 6$ кДж, т.е. вода ещё не закипала. Но за пятый промежуток времени Q_- увеличится на 6 кДж за счёт закидывания следующей пельмешки, и должна уменьшится на 15 кДж за счёт энергии от плиты. Но здесь-то наша величина Q_- и обнулится, а значит, на пятом промежутке времени вода впервые и закипит. Таким образом, всего вода в кастрюле закипит 10 раз (после 5й, 6й, ..., 14й пельмешек).

Ответ: При $\tau = 10$ с вода в кастрюле закипит 10 раз.

Задача 5.



Рассмотрим правый блок. На него действуют пять сил: две от нити AC, две от нити BG, и одна от нити EF. Блок находится в равновесии, поэтому сумма всех сил равна нулю. В частности, сумма всех горизонтальных сил, действующих на блок, также равна нулю. Но в горизонтальном направлении на блок действуют ровно две силы - из чего мы заключаем, что сила натяжения нити AC равна силе натяжения нити BG. Значит, на платформу AC действуют три одинаковые по величине силы, приложенные в точках A, B и C.

Определим расстояние от C до B. Оно равно $a+b = 40$ см. Тогда расстояние AB равно 20 см. Обозначив силу натяжения нитей за T, можем написать, что груз должен иметь вес $3T$ (т.к. сумма сил, действующих на стержень, должна быть равна нулю). Теперь напишем уравнение моментов сил относительно точки A.

$$20\cdot T + 60\cdot T - AX\cdot 3T = 0$$

Отсюда заключаем, что AX равно $26\frac{2}{3}$ см.

Ответ: Расстояние AX от груза до левого края платформы равно $26\frac{2}{3}$ см

Районный тур 2013. 8 класс. II вариант

Задача 1.

Рассмотрим сначала цельные дубовые кубы. Обозначим длину ребра куба за a. Тогда объём куба будет равен $V = a^3$, масса $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a^3$. Площадь нижней (как и любой другой) грани куба при этом будет равна $S = a^2$, откуда мы можем непосредственно узнать давление на поверхность:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho a^3 g}{a^2} = \rho a g$$

Отсюда можем сделать вывод: при увеличении размера куба давление увеличивается. Осталось лишь найти такое a, при котором давление сравняется с тем, которое может выдержать лёд. Тогда все кубы меньшего размера ставить на лёд будет безопасного, а большего - не стоит.

$$\rho a g = P_{max} \Rightarrow a = \frac{P_{max}}{\rho g} = \frac{1,5 \cdot 10^4 \text{ Па}}{700 \text{ кг/м}^3 \cdot 10 \text{ Н/кг}} \approx 2,14 \text{ м}$$

Теперь рассмотрим полые кубы. Также обозначая длину ребра куба за a, сразу напишем выражение для массы. Каркас состоит из 12 рёбер, каждое длиной a, что даст нам $m = 12 \cdot \rho_l a$, где ρ_l - линейная плотность трубы. Обратите внимание, a в выражение для массы входит уже не в 3й, как для случая цельных кубов, а в первой степени! С этим и будет связан иной качественный результат для этого вида кубов. Написав выражение для давления,

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{12\rho_l a g}{a^2} = \frac{12\rho_l g}{a}$$

Увидим, что при увеличении размера куба его давление на поверхность уменьшается! Опять-таки, найдём критическое a, начиная с которого такие кубы будет безопасно ставить на лёд.

$$\frac{12\rho_l g}{a} = P_{max} \Rightarrow a = \frac{12\rho_l g}{P_{max}} = \frac{12 \cdot 50 \text{ кг/м} \cdot 10 \text{ Н/кг}}{1,5 \cdot 10^4 \text{ Па}} \approx 0,6 \text{ м}$$

<u>Ответ:</u> Цельные кубы безопасно ставить на лёд, если их сторона меньше $2,14$ м; полые - если их сторона больше $0,4$ м

Задача 2.

В случае, когда центр шестерни (обозначим его О) неподвижен, он всегда будет оставаться центром отрезка АВ - это видно из симметрии системы. Также это можно понять из того, что рейка a смещается на столько же зубцов, что и рейка b. Аналогичный вывод верен и при движении точки О: для наблюдателя, всегда находящегося над точкой О, всё будет выглядеть точно так же, как описано в предыдущем пункте.

Таким образом, забываем теперь о рейках и шестерне, и можем думать о задаче в упрощенном виде: точка О - всегда середина отрезка АВ, хотя длина последнего может меняться. По условию один конец этого отрезка движется по горизонтальной прямой - обозначим ее m, другой по вертикальной (на рисунке) прямой - обозначим ее n.

Выберем оси координат совпадающими с прямыми m и n. Заметим: О - центр АВ, следовательно, и по каждой из осей О находится посередине между А и В. Но по каждой из выбранных нами осей один из концов АВ не меняет положения, а значит О движется с половинной скоростью другого конца. Таким образом, О будет двигаться по прямой, и её горизонтальная скорость будет равняться $V_a/2$, а вертикальная - $V_b/2$.

Задача 3.

Заметим: когда Петя кладёт кольцо на стакан, масса всей конструкции увеличивается на $m = 375$ г. Соответственно, объём части конструкции, находящейся под водой, должен также увеличится на $V = m/\rho = 375$ см^3. Учитывая площадь основания стакана $S = 100$ см^2, получается, что в момент докладывания на стакан очередного кольца конструкция проседает вниз на $3,75$ см. Вместе с тем, кольцо увеличивает её высоту на 2 см. Итого, верхняя кромка стакана при докладывании каждого кольца опускается на $1,75$ см вниз. Конструкция утонет ровно тогда, когда её верхняя кромка окажется ниже поверхности воды и она начнёт набирать воду. Изначально конструкция возвышается над водой на 6 см, значит, это произойдёт при докладывании 4го кольца. $(4 \cdot 1,75 = 7 > 6)$.

<u>Ответ:</u> Конструкция утонет сразу после докладывания на неё 4го кольца.

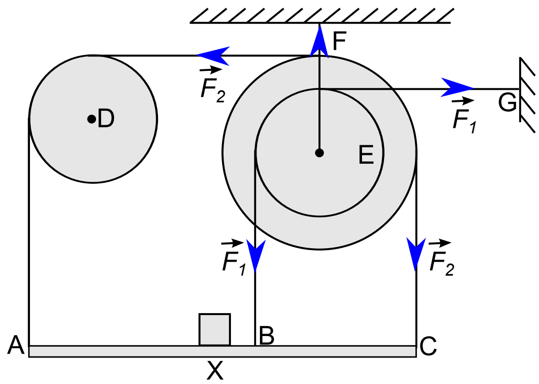
Задача 4.

Рассмотрим следующую величину: количество теплоты, которое нужно сообщить системе, чтобы нагреть её до $T = 100^o$C, т.е. довести воду в ней до кипения. Назовём эту величину Q_-. В начальный момент, когда система состоит только из воды, $Q_{-_0} = (100 - 92) \cdot 8400 = 67,2$ кДж. Каждый пельмень, который докидывают в кастрюлю, увеличивает Q_- на $E_{\text{П}} = 0,02 \cdot 3 \cdot 100 = 6$ кДж. (Т.к. теперь нам нужно нагреть до 100^oC целый лишний пельмень, а на его нагревание должно уйти ровно столько теплоты). При этом за период времени длины τ (от закидывания одного пельменя до закидывания следующего) в систему от плиты поступает энергия $E_+ = P \cdot \tau$. Ясно, что для того, чтобы у воды вообще были шансы закипеть, E_+ должна быть больше 6 кДж. Также заметим следующее: если между закидыванием каких-то двух пельменей вода закипела, то между закидыванием следующих она также закипит. Действительно: если она закипела, то во-первых $E_+ > 6$ кДж, а во-вторых, в момент закипания Q_- станет равной нулю. Тогда в момент закидывания следующего пельменя Q_- станет равной 6 кДж. Но $E_+ > 6$ кДж, т.е. плита за следующий промежуток времени сумеет передать достаточное количество теплоты, следовательно, момент кипения настанет вновь.

Таким образом, осталось лишь определить первый момент, в который закипит вода. Ответим сначала на вопрос задачи при $\tau = 10$ с. Тогда $E_+ = 15$кДж. В конце 7го промежутка времени τ (прямо перед закидыванием пятой пельмешки) $Q_- = 67,2 + 7 \cdot 6 - 7 \cdot 15 = 4,2$ кДж, т.е. вода ещё не закипала. Но за восьмой промежуток времени Q_- увеличится на 6 кДж за счёт закидывания следующей пельмешки, и должна уменьшится на 15 кДж за счёт энергии от плиты. Но здесь-то наша величина Q_- и обнулится, а значит, на восьмом промежутке времени вода впервые и закипит. Таким образом, всего вода в кастрюле закипит 10 раз (после 8й, 9й, 10й и 11й пельмешек).

Ответ: При $\tau = 10$ с вода в кастрюле закипит 4 раза.

Задача 5.



Рассмотрим правый блок. На него действуют пять сил: две от нити AC, две от нити BG, и одна от нити EF. Блок находится в равновесии, поэтому сумма всех сил равна нулю. В частности, сумма всех горизонтальных сил, действующих на блок, также равна нулю. Но в горизонтальном направлении на блок действуют ровно две силы - из чего мы заключаем, что сила натяжения нити AC равна силе натяжения нити BG. Значит, на платформу AC действуют три одинаковые по величине силы, приложенные в точках A, B и C.

Определим расстояние от C до B. Оно равно $a+b = 50$ см. Тогда расстояние AB равно 20 см. Обозначив силу натяжения нитей за T, можем написать, что груз должен иметь вес $3T$ (т.к. сумма сил, действующих на стержень, должна быть равна нулю). Теперь напишем уравнение моментов сил относительно точки A.

$$20 \cdot T + 70 \cdot T - AX \cdot 3T = 0$$

Отсюда заключаем, что AX равно 30 см.

Ответ: Расстояние AX от груза до левого края платформы равно 30 см