Решения задач городского тура 2013 г. 7 класс.

7 класс. Задача 1

Пловцу не выгодно каждый раз возвращаться на плот: если, выныривая, он сместится к берегу Б, можно будет уменьшить грубину нырков, и сделать их короче.

Сначала рассмотрим задачу попроще. Пусть пловцу надо нырнуть с плота А один раз и всплыть в заданной точке В, и сделать это за минимальное время. Найдем кратчайшую траекторию для такого ныряния.

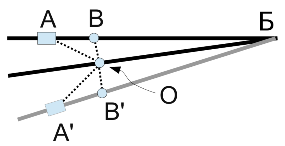

Рис. 1.

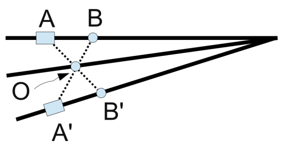

Рис. 2.

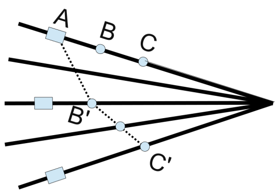

Рис. 3.

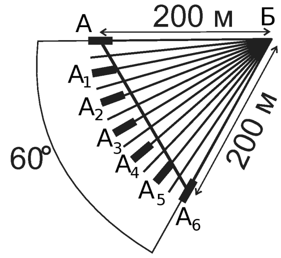

Рис. 4.

Очевидно, что участки кратчайшей траектории пловца до дна и обратно представляют собой отрезки прямой. Добавим к основному рисунку рисунок моря, зеркально отраженный относительно линии дна (см. рис. 1). Нарисуем траекторию движения пловца и на основном рисунке (АОВ), и на отраженном (А′ОВ′). Когда АОВ кратчайшая, кратчайшая и АОВ′ (они равны). Но АОВ′ кратчайшая, если является прямой (см. рис. 2). Значит, строя отражение точки В – точку В′, и соединяя ее с А прямой, мы получаем точку О, в которой следует коснуться дна. Вообще, рассматривая время нырка, можно заменить движение "вниз-вверх" прямолинейным движением из точки А в В′.

Если после этого ныряльщик соберется нырнуть еще раз, и выплыть в точке С, удобно повернуть картинку, рассмотреть точку В′ в качестве точки его старта, и повторить все рассуждения (см. рис. 3), проведя кратчайший путь в точку С′. Если же мы хотим, чтобы ныряльщик нырнул два раза, стартовав в А, и финишировав в С, а положение точки В не задано, точку В′ следует выбирать так, чтобы она располагалась на АС′.

Вернемся к исходной задаче. У нас 6 ныряний. Достроим наш рисунок с помощью последовательных отражений до вида соответствующего этому количеству ныряний (см. рис. 4). На каждом отражении изобразим положение плота буквами $А_1$, $А_2$, $А_3$...

По условию задачи ныряльщик должен вернуться на плот. Тогда кратчайшей траекторией на этом рисунке является прямая, соединяющая плот с его последним отражением $А_6$. Найдем ее длину. Поскольку у нас 12 отражений, а угол между дном и поверхностью 5°, то суммарный угол равен $12 \cdot 5 = 60°$. Следовательно, треугольник $АА_6Б$ является равносторонним, и длина траектории пловца $АА_6$ равна 200 м.

Теперь можно рассчитать время, разделив путь на скорость. Подставив числа, получим $t = 200/0.5 = 400$ с.

Ответ: минимальное время ныряния равно 400 секундам.

7 класс. Задача 2

Обозначим искомую величину h. И мяч, и эквилибрист находятся в равновесии.

Рассмотрим условие равновесия эквилибриста. Пусть давление между доской и шаром равно P_1. Соответствующая сила давления P_1S_1 противодействует силе тяжести, действующей на эквилибриста вместе с доской: $Mg = P_1S_1$.

Отсюда можем найти давление, которое эквилибрист с доской оказывает на шар (а шар – на эквилибриста):

$$P_1 = \frac{Mg}{S_1} = \frac{50 \cdot 10}{0.05} = 10 \text{ кПа}.$$

Рассмотрим теперь условие равновесия всей системы – мяча вместе с эквилибристом. На систему действуют: суммарная сила тяжести (направлена вниз) и сила давления, со стороны пола (направлена вверх). Пусть давление на шар со стороны пола (и на пол со стороны шара) равно P_2. Тогда условие равновесия имеет вид $(M + m)g = P_2S_2$. Отсюда можем найти давление P_2:

$$P_2 = \frac{(M+m)g}{S_2} = \frac{350 \cdot 10}{0.2} = 17.5 \text{ кПа}.$$

Рассмотрим теперь жидкость внутри мяча. В верхней части мяча давление жидкости равно P_1, а в нижней P_2. Так как верхняя часть жидкости выше нижней на величину h, разница давлений $P_2 - P_1$ описывается уравнением:

$$P_2 - P_1 = \rho g h \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{17500 - 10000}{1000 \cdot 10} = 0.75 \text{ м} \qquad (1)$$

Ответ: Растояние между доской и полом равно 75 см.

7 класс. Задача 3

По графику скорости найдем путь, пройденный каждым шаром. Этот путь для каждого шара равен площади под его графиком скорости. Например, для шарика Феди эта площадь закрашена серым на рис. 5; это треугольник со сторонами 3.6 м/с и 12 с. Определить его площадь можно, достроив треугольник до прямоугольника вдвое большей площади, поэтому Федин шарик прокатится путь, примерно равный $3.6 \cdot 12 : 2 = 21.6$ м, Это значит, что Федин шарик перекатится за черту на $21.6 - 15 = 6.6$ м.

Рассуждая аналогично и вычисляя площадь под графиком скорости Петиного шарика, получим стороны треугольник 2 м/с и 6.6 с, так что этот шарик прокатится расстояние, равное площади $2 \cdot 6.6 : 2 = 6.6$ м. Итак, Петин шарик не докатится до черты на $15 - 6.6 = 8.4$ м.

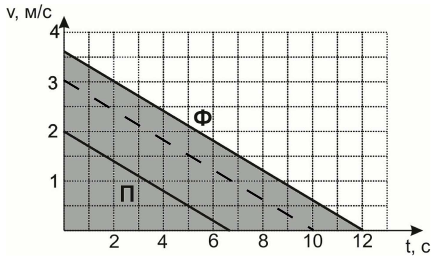

Рис. 5.

Найдем скорость Фединого шарика в момент пересечения черты. Заметим, что Федин шарик переехал за черту примерно на то же расстояние, какое проехал Петин шарик целиком. Следовательно скорость Фединого шарика в момент пересечения черты приближенно равняется скорости петиного шарика в момент броска. Значит, скорость шарика Феди была примерно 2 м/с.

Заметим что наклоны графиков у нас одинаковые, следовательно шарики одинаково тормозятся при своем движении. Если мы в третий раз пустим шарик, можно предположить, что его график тоже будет параллелен этим двум. Возьмем линейку и будем двигать ее между графиками шариков так, чтобы она оставалась параллельной обоим имеющимся графикам. Подберем прямую так, чтобы площадь образованного ей треугольника была равна 15 м. Требуемая прямая показана пунктиром на рисунке: она пересекает оси координат графика в точках 3 м/с и 10 с. Поэтому, чтобы выиграть, следует катить мячик с начальной скоростью 3 м/с.

Ответ: Федин шарик перекатится за черту на 6.6 м, Петин – не докатится 8.4 м. В момент пересечения черты скорость шарика Феди была примерно 2 м/с. Чтобы выиграть, следует запустить мячик с начальной скоростью 3 м/с.

7 класс. Задача 4

Если попробовать вычислять скорость поезда по данным Харитона, подставляя их в формулу

$$V = \frac{nL}{t}, \tag{2}$$

данные из таблицы дадут противоречивый результат.

Это происходит по двум причинам: столб появляется в окне в течение некоторого промежутка времени, и в любой момент этого промежутка Харитон нажимает кнопку секундомера. Кроме того, на само нажатие кнопки требуется некоторое время, и не всегда оно одинаково. Ошибка измерения времени при этом не превосходит некоторого τ. Если эта величина гораздо меньше t, она не сильно повлияет на точность ответа. Поэтому, чтобы минимизировать ошибку вычислений, нужно, чтобы измеряемое время было гораздо больше, чем τ.

Итак, бо́льшая точность получается, если отсчитывать много столбов, поэтому, если мы хотим наилучшим образом оценить скорость поезда, надо воспользоваться последней колонкой таблицы с $n = 9$:

$$V \simeq \frac{9 \cdot 42}{13.57} \simeq 27.86 \text{ м/с}. \tag{3}$$

Это значение, хотя и не вполне точное, послужит нам хорошей оценкой для дальшейших расчетов.

Чтобы условие задачи выполнилось, ошибка измерения скорости не должна превзойти 0.5% от этой величины, т.е.

$$\Delta V \leq 0.005 \cdot 27.86 \text{ м/с} \simeq 0.14 \text{ м/с}$$

Попробуем оценить τ – погрешность измерения – исходя из данных таблицы. Составим вторую таблицу: время „от столба до столба“ при измерениях Харитона.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δt, сек.	1.57	1.36	1.52	1.61	1.38	1.63	1.36	1.64	1.50

Видно, что минимальное измеренное Харитоном время равняется 1.36, а максимальное – 1.64, т.е. погрешность τ не превышает 0.3 с.

Если Харитон провел опыт с n столбами, наихудшее возможное его измерение определяется соотношением $nL \pm \Delta L = Vt$, потому что за ошибочно добавленный или недоучтенный промежуток τ поезд пройдет лишний путь (или не доедет) равный $\Delta L = V\tau \simeq 8.4$ м.

Используя формулу (2), Харитон получит скорость, которая отличается от точного результата

$$V = \frac{nL \pm \Delta L}{t}$$

на величину $\pm\Delta L/t$. Чтобы эта ошибка не превзошла найденное ΔV, величина t должна быть больше $\Delta L/\Delta V \simeq$ 60 сек.

Из условия ясно, что двигаясь со скоростью V поезд проезжает один промежуток между столбами за время $L/V \simeq 1.5$ с. За 60 секунд поезд проедет около 40 промежутков, значит, Харитон должен отсчитать по крайней мере 40 столбов.

Ответ: Харитон должен отсчитать хотя бы 40 столбов

Примечание: Зная τ, можно сказать, что скорость V, которую мы оценили с помощью последней колонки таблицы, определена с погрешностью $\Delta L/t = 8.4/13.57 \simeq 0.61$ м/с. Легко убедиться, что если изменить на эту величину оценку скорости поезда (3), ответ задачи не изменится.

Примечание: Оценивая скорость поезда, мы использовали только последнюю колонку таблицы. Это не вполне рационально: могло случайно получиться, что именно это измерение было "на границе плохости". Когда с подобной проблемой сталкиваются физики-экспериментаторы, они наносят данные таблицы на график: по одной оси откладывают путь nL, а по другой время t и ставят на графике точки, соответствующие каждому измерению. Из-за погрешностей получившиеся точки не лежат на одной прямой, однако прямую все-таки можно провести через облако построенных точек. Делать это следуте так, чтобы прямая лежала примерно в середине этого облака. Понятно, что скорость можно оценить по тому, как сильно наклонена эта прямая

Можно доказать, что подобный метод обработки данных – самый точный.

7 класс. Задача 5

Сначала определим область, в которой Джон может оказаться за некоторое фиксированное время τ. В стоячей воде это был бы, очевидно, круг с центром в точке, в которой изначально находится Джон, и радиусом $v\cdot\tau$. На реке мы можем сначала перейти в систему отсчёта, связанную с течением – в этой системе наша область будет кругом – и потом, чтобы найти область в исходной системе, перейти обратно. Тогда каждая точка области сместится на один и тот же вектор длины $u\cdot\tau$, сонаправленный с течением реки. Итого, за фиксированное время τ Джон может оказаться в области, изображённой на рис. 6

Легко видеть, что есть точки, в которых Джон мог оказаться за время, например, $\tau/2$, но уже не может оказаться за время τ. Это происходит из-за того, что скорость течения реки больше максимальной скорости Джона. Чтобы найти область, в которой Джон мог оказаться за время, не превышающее пяти минут, нужно взять объединение всех областей для всех τ, меняющихся от $\tau = 0$ до $\tau = 5$ мин. Эта итоговая область изображена на рис. 7, что и является ответом в задаче.

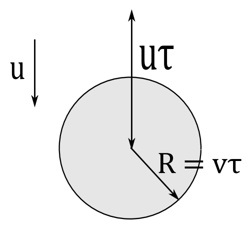

Рис. 6.

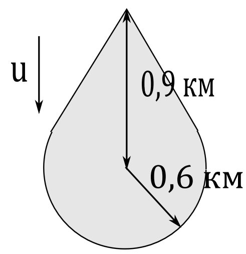

Рис. 7.

Ответ: см. рис. 7.

7 класс. Задача 6

Пусть за некоторый промежуток времени мальчик A переместился в точку A' (см. рис. 8). Поскольку мальчик B движется с той же скоростью, то пройденное им расстояние BB' совпадает с AA'. Мальчик C двигался с удвоенной скоростью, следовательно, точка C', в которой он оказался, находится в два раза дальше от точки B, чем B'. Из этого можно заключить, что $AA' = BB' = B'C'$.

На рисунке все столбы располагаются на прямой KN. Точка K соответствует тому столбу, напротив которого все три мальчика находились в начальный момент времени, точки L и N - самая левая и самая правая точки, которые мальчик A видит в интервале между двумя другими мальчиками.

Нетрудно заметить, что треугольники $A'B'C'$, $B'LM$ и $C'MN$ равны между собой. Из этого следует, что расстояние KN в три раза больше, чем AA'. Следовательно точка N движется со скоростью $3v = 6$ м/с. Точка L же движется со скоростью $v = 2$ м/с.

Нам необходимо построить график количества столбов на промежутке LN от времени. Через каждые $a/(3v) =$ 3 секунды это количество возрастает на один, так как точка N достигает нового столба, и он входит внутрь LN. С другой стороны, каждые $a/v = 9$ секунд один столб выходит из этого промежутка из-за движения точки L.

В начальный момент между мальчиками B и не просматривалось ни одного столба. Столбы будут добавляться по одному на 3й и 6 секунде. Затем, на 9й секунде, количество столбов не изменится. Затем снова появятся

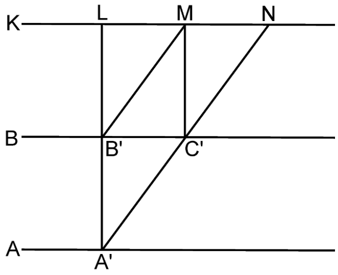

Рис. 8.

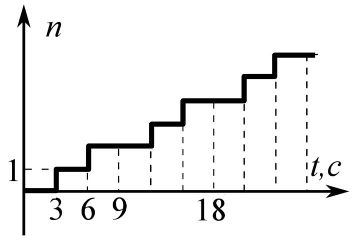

Рис. 9.

столбы - на 12й и 15 секундах. На 18й их количество снова не изменится...

<u>Ответ:</u> Требуемый график представлен на рис. 9

<u>7 класс. Задача 7</u>

Пронумеруем пружины сверху вниз.

Когда к системе подвесили грузы, все пружины деформировались. Пусть третья пружина растянулась на $\Delta x > 0$. Тогда, поскольку расстояние между кубиками А и В измениться не может (они связаны нерастяжимой нитью), вторая пружина сжалась на Δx. Если вдруг наше предположение о том, что третья пружина именно растянулась, а не сжалась, окажется неверным, в ходе вычислений мы просто получим отрицательное значение Δx.

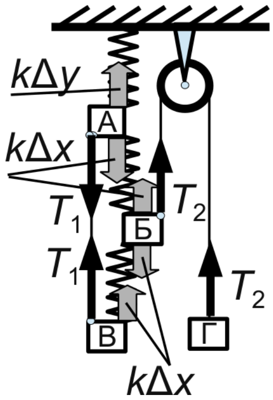

Рис. 10.

Растяжение первой пружины обозначим Δy. Также введем обозначения для сил натяжений нитей (см. рис. 10).

Первая пружина растянута и тянет кубик А вверх с силой $k\Delta y$. Вторая пружина сжата и толкает кубик А вверх с силой $k\Delta x$, а кубик Б – вниз с силой $k\Delta x$. Третья пружина растянута и тянет кубик Б вниз с силой $k\Delta$, а кубик В – вверх с силой $k\Delta x$.

После подвешивание грузов каждый из кубиков находится в равновесии под действием сил натяжений нитей и пружин. Условие равновесия кубика А:

$$k\Delta y + k\Delta x = T_1. \tag{4}$$

Условие равновесия кубика Б:

$$T_2 = k\Delta x + k\Delta x. \tag{5}$$

Условие равновесия кубика В:

$$T_1 + k\Delta x = M_1 g. \tag{6}$$

Условие равновесия кубика Г:

$$T_2 = M_2 g. \tag{7}$$

Подставляя сюда $M_1 g = 6$ Н, $M_2 g = 5$ Н, получим из (7) $T_2 = 5$ Н. Из (5) видно, что

$$\Delta x = \frac{T_2}{2k} = \frac{5\ \text{Н}}{2 \cdot 50\ \text{Н/м}} = 0.05\ \text{м} = 5\ \text{см}.$$

Затем из (6)

$$T_1 = M_1 g - k\Delta x = 6\ \text{Н} - 50\ \text{Н/м} \cdot 0.05\ \text{м} = 3.5\ \text{Н}.$$

И, наконец, из (4)

$$\Delta y = \frac{T_1}{k} - \Delta x = \frac{3.5\ \text{Н}}{50\ \text{Н/м}} - 0.05\ \text{м} = 0.02\ \text{м} = 2\ \text{см}$$

Поскольку Δx и Δy получились больше нуля, наше предположение в начале о том, какая пружина сжата, а какая растянута, были верны.

Осталось сообразить, что при таких растяжениях кубик В опустится на $\Delta y = 2$ см, а кубик Г – на $\Delta x - \Delta y = 3$ см. Значит, чтобы во втором случае кубики сдвинулись бы также, требуется взять пружину с жесткостью $k_1 = M_1 g/\Delta y = 300$ Н/м для кубика В, а для кубика Г –

$$k_2 = M_2 g/(\Delta x - \Delta y) \simeq \frac{500}{3}\ \ \text{Н/м}.$$

<u>Ответ:</u> Кубики В и Г сместятся вниз на 2 и 3 сантиметра соответственно. Во втором случае следует взять пружины с жесткостями 300 Н/м и 166 $\frac{2}{3}$ Н/м.