Районный тур 2013. 11 класс. I вариант.

Задача 1.

Заметим, что и Заяц и Волк бегут прямолинейно.

Действительно, нарисуем некоторое расположение Волка и Зайца (точки В и З), построим их изображения в заборе (точки В* и З*) и изобразим векторы скоростей персонажей, направив их как это описано в условии. Эти вектора, очевидно, если их продолжить, проходят через точку О (см. рис. 1). Через малый промежуток времени Δt и Заяц, и Волк сместятся вдоль векторов своих скоростей, однако, при новых, смещенных положениях З′ и В′ точка О останется на месте. Значит, направление скорости Зайца и Волка через малый промежуток Δt не меняется. Но не изменится она и дальше, поскольку рассуждение справедливо при любом начальном расположении Зайца и Волка.

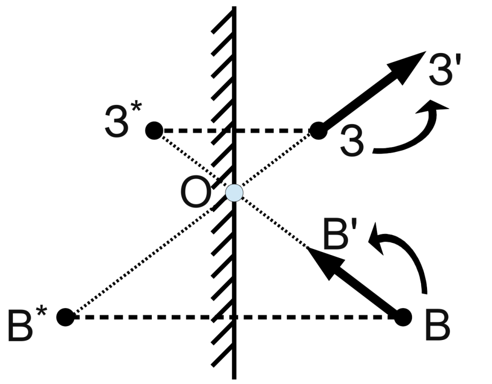

Рис. 1:

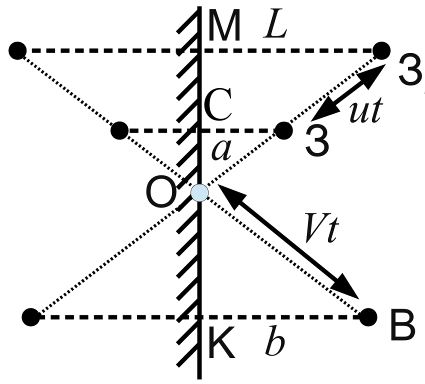

Рис. 2:

Изобразим конечное расположение Зайца З$_k$(см. рис. 2). Треугольники КВО, СЗО и МЗ$_k$О подобны и позволяют найти ответ.

Для этого обозначим искомое расстояние МЗ$_k$ через L, величину ОЗ через x, время движения Волка через t. Тогда

$$\text{KB} : \text{ЗL} : \text{З}_k\text{M} = \text{BO} : \text{ЗO} : \text{З}_k\text{O}$$

$$b : a : L = Vt : x : (x + ut).$$

Из этой системы уравнений находим $L = (Va + ub)/V$.

<u>Ответ</u>: Заяц будет находиться на расстоянии $L = (Va + ub)/V$ от забора.

Задача 2.

Сосуд тянет вниз сила тяжести, а удерживает в трубе сила трения, возникающая от того, что давление столба воды в сосуде распирает стенки вбок, в результате чего стенки давят на трубу с некоторой силой N (см. рис. 3, мы изобразили силу N в двух проекциях: вид сбоку и вид сверху, поскольку она неравномерно распределена по высоте вдоль стенок сосуда). Причина появления силы N – закон Паскаля.

Найдем величину суммарной по модулю силы N, с которой жидкость, налитая до уровня H, давит на стенки. Давление жидкости увеличивается с глубиной: у поверхности воды оно равно нулю (атмосферным давлением в задаче предлагается пренебречь), а на глубине H оно равно $p_{max} = \rho g H$. Давление увеличивается линейно, поэтому на площади контакта трубы и сосуда $2\pi RH$ давление в среднем равно $p_{max}/2$. Действительно, для любого куска стенки, где давление больше, чем $p_{max}/2$ на величину Δp, найдется кусок такой же площади, где давление меньше, чем $p_{max}/2$ ровно на величину Δp. Понятно, что такие куски расположены симметрично относительно уровня $H/2$. Значит,

$$N = 2\pi R H p_{max}/2 = \pi \rho g R H^2.$$

Соответствующая этой силе давления стенок сила трения не может превзойти μN.

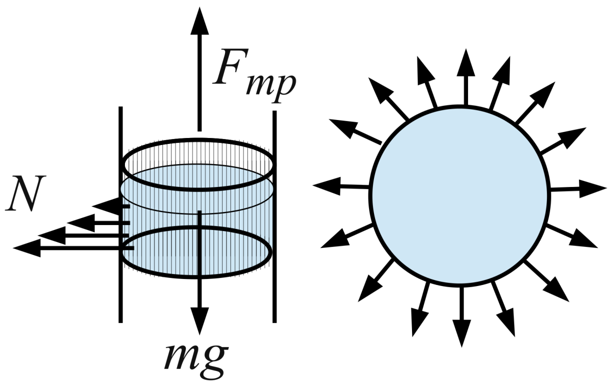

Рис. 3:

Масса воды в сосуде $M_0 = \rho V = \rho \pi R^2 H$, значит сила тяжести, действующая на сосуд с водой, равна $Mg + \rho \pi R^2 H g$. Соответственно, условие застревания сосуда в трубе принимает вид

$$Mg + \rho \pi R^2 H g \leq \mu \pi R \rho g H^2.$$

Теперь нужно решить данное неравенство, содержащее квадратный трехчлен по H:

$$\mu \pi R \rho g H^2 - \rho \pi R^2 g H - Mg \geq 0.$$

Удобным приемом в физике является обезразмеривание, оно позволит не сделать арифметических ошибок. Разделим все слагаемые неравенства на $\rho \pi R g$, максимально упростив вклад при квадратичном члене:

$$\mu H^2 - RH - \frac{Mg}{\rho \pi R} \geq 0$$

и введем безразмерный параметр $z = H/R$, который и будем искать. Еще раз разделим все уравнение на R^2:

$$\mu z^2 - z - a \geq 0, \qquad \text{где } a = \frac{Mg}{\rho \pi R^3}.$$

Корни неравенства $(1 \pm \sqrt{1 + 4\mu a})/(2\mu)$ позволяют сразу выписать ответ

$$z \in (-\infty, \frac{1 - \sqrt{1 + 4\mu a}}{2\mu}) \cup (\frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu a}}{2\mu}, \infty).$$

Осталось только выкинуть нефизические отрицательные значения z и привести в качестве ответа $H = Rz$.

Ответ: Высота должна быть выше, чем $R(1 + \sqrt{1 + 4\mu a})/(2\mu)$, где $a = Mg/(\rho \pi R^3)$.

Задача 3.

Процесс, совершаемый газом, в любой момент удовлетворяет системе уравнений

$$(p + p_0)(V + V_0) = 25 p_0 V_0, \qquad pV = \nu RT. \tag{1}$$

Следует искать минимальное решение этой системы относительно переменной T.

Приведем вычисление этой задачи в безразмерных переменных. Разумеется, к верному ответу приведут и другие эквивалентные расчеты.

Введем $p' = p/p_0$ и $V' = V/V_0$ – безразмерные давление и объем. Температура T в этих переменных $T = p_0V_0p'V'/\nu R$ пропорциональна произведению $p'V'$. Первое уравнение системы (1) примет вид $(p'+1)(V'+1) = 25$ или $p'V' = 24 - (p'+V')$. Понятно, что температура максимальна, когда максимально произведение $p'V'$. Но это происходит тогда, когда то, что вычитается из 24 в этом выражении минимально, т.е. когда прямая $p'+V' = K$ имеет минимальный коэффициент K. Наоборот, при максимальном K температура системы минимальна. Выбрав произвольную точку на графике $p'(V')$, следует посмотреть, какая прямая множества $p'+V' = K$ проходит через нее: если наинизшая из возможных – это максимум температуры в процессе, если наивысшая – это минимум.

В безразмерных переменных график $p'(V')$ – симметричная относительно прямой $p' = V'$ гипербола – вогнутая кривая (см. рис. 4). , поэтому в точке $p' = V'$ она пересечется с самой нижней из обсуждаемого множества прямых. Решив $p'V' = 24-(p'+V')$ в предположении $p' = V'$, получим $p' = V' = 4$ (отрицательный корень отбрасываем), что соответствует температуре $T = 16p_0V_0/(\nu R)$.

Точка пересечения графика $p'(V')$ с наивысшей прямой вида $p'+V' = K$, очевидно, имеет место на границе промежутка, в котором меняется давление и объем системы. Пользуясь уравнением (1), найдем, что максимальному давлению $p' = 9$ соответсвует объем $V' = 1.5$, а максимальному объему $V' = 14$ – давление $p' = 2/3$. Сравнивая $p'+V'$ в этих точках, получим, что $9+1.5 < 14+2/3$, поэтому наинизшая температура наблюдается в точке, где $p' = 2/3$ $V' = 14$, т.е. при $T = p_0V_0p'V'/(\nu R) = 28p_0V_0/(3\nu R)$

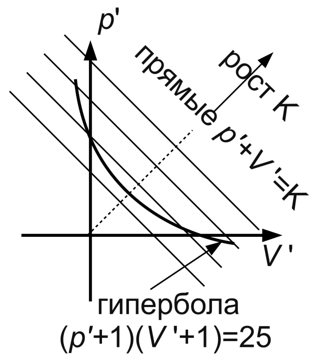

Рис. 4:

Ответ: $T_{max} = 16p_0V_0/(\nu R)$, $T_{min} = 28p_0V_0/(3\nu R)$.

Задача 4.

Пусть заряд вылетает из точки A под углом γ к оси Z ($\alpha \le \gamma \le \beta$). Представим движение заряда в магнитном поле как суперпозицию равномерного движения вдоль оси Z со скоростью $V\cos\gamma$ и равномерного движения по окружности со скоростью $V\sin\gamma$ в плоскости XY (см. рис. 5, 6).

Легко вычислить параметры, характеризующие движение системы по окружности. Сила Лоренца $qBV\sin\gamma$ направлена к центру окружности и обеспечивает центростремительное ускорение заряда $m(V\sin\gamma)^2/R$. Отсюда радиус окружности $R = mV\sin\gamma/(qB)$. Период, за который частица совершает полный оборот, равен

$$T = \frac{2\pi R}{V\sin\gamma} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Заметим, что этот период не зависит от γ, т.е. все частицы будут сталкиваться с детектором через одинаковые промежутки времени. Однако, частицы движутся вдоль оси Z с разными скоростями, поэтому ударяться в детектор они будут в разных точках. Для фиксированного γ расстояние, которое проходит частица между соударениями с детектором, $l = VT\cos\gamma$. Так как $\cos\beta \le \cos\gamma \le \cos\alpha$, точки детектора, в которые попадут шарики впервые после вылета, задаются координатами

$$l \in (l_{max}, l_{min}), \qquad \text{где } l_{min} = \frac{2\pi mV\cos\beta}{qB}, \quad l_{max} = \frac{2\pi mV\cos\alpha}{qB}.$$

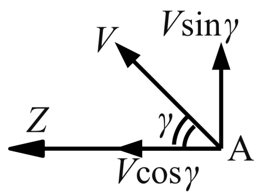

Рис. 5:

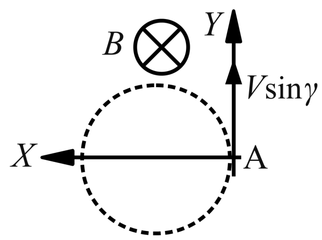

Рис. 6:

После упругого соударения каждая частица полетит от детектора с той же скоростью, какую она имела непосредственно перед ударом, причем угол, который эта скорость образует с осью Z, не изменится. Поэтому далее частицы будут возвращаться на детектор через равные расстояния l, являющиеся функцией угла вылета γ данной частицы.

Рассмотрим рис. 7, где жирной линией отмечены участки, в которых происходит соударение частиц с детектором AD. Видно, что промежутки детектора, куда частицы не попадают, сокращаются при удалении от A, а светящиеся промежутки увеличиваются. Так, например, во второй раз частицы попадут на участок $(2l_{min}, 2l_{max})$, а в n-тый раз – на участок (nl_{min}, nl_{max}) длиной $n(l_{max} - l_{min})$. Если при некотором n эта длина сравнялась или превзошла l_{max}, то неосвещенный участок детектора совсем пропадает:

$$n(l_{max} - l_{min}) \geq l_{max} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \frac{l_{max}}{l_{max} - l_{min}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta} \simeq 3.16$$

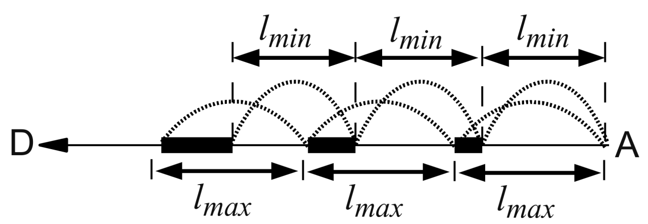

Рис. 7:

Значит, начиная с третьего удара о стержень, неосвещенный отрезок пропадает.

Ответ: Светиться будут участки детектора с координатами $(l_{min}, l_{max}) \cup (2l_{min}, 2l_{max}) \cup (3l_{min}, \infty)$, где $l_{min} = 2\pi mV\cos\beta/(qB)$, $l_{max} = 2\pi mV\cos\alpha/(qB)$.

Задача 5.

Рассмотрим пока случай, когда заряды q и Q имеют разные знаки. Пока тело не оторвалось от шара, на него будет действовать сила, равная по модулю $f = |kqQ|/R^2$, притягивающая тело к центру шара, и сила со стороны однородного поля, направленная вниз по рисунку и равная по модулю $F = |q|E$.

Под действием этих сил тело сдвигается по шару, постепенно разгоняясь. В некоторый момент (будем считать, что что в этот момент положение тела задается углом α, см. рис. 8) скорость движения тела по шару V станет такой большой, что тело оторвется. Этот момент характеризуется условием, что сумма проекций сил F и f на направление к центру окружности сравнялась с центростремительной силой mV^2/R:

$$\frac{mV^2}{R} = f + F\cos\alpha \tag{2}$$

Скорость, которую тело успело набрать к данному моменту, легко выразить из закона сохранения энергии, так как работу совершает только сила F, вдоль которой тело сдвинулось на расстояние $R(1-\cos\alpha)$:

$$\frac{mV^2}{2} = FR(1-\cos\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{R} = 2F(1-\cos\alpha) \tag{3}$$

Подставляя это значение в (2), получим

$$2F(1-\cos\alpha) = f + F\cos\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} - \frac{f}{3F}. \tag{4}$$

Итак, при $f = 0$ тело оторвется при $\alpha \simeq 48^o$. С ростом f соответствующий косинус будет уменьшаться, а угол α увеличиваться. Заметим, что отрыв тела от шара вообще может не произойти – если полученный косинус окажется меньше -1. Это происходит при $f/F \geq 5$

Если отрыв произошел, по условию сила F моментально отключается, и на тело действует лишь сила притяжения к сфере. Воспользовавшись аналогией с движением спутника вокруг Земли, легко понять, что тело может

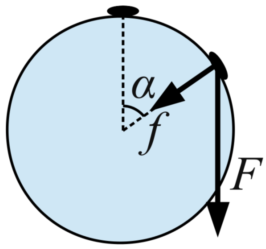

Рис. 8:

- упасть обратно на шар
- полететь вокруг шара по кругу
- полететь вокруг шара по эллипсу
- улететь от шара по параболе
- улететь от шара по гиперболе

Тело не упадет обратно на шар, если в момент отрыва и выключения внешнего поля оно имело "первую космическую" скорость, точнее, ее электростатический аналог. Скорость эта достиается, если центростремительная сила mV^2/R при движении по окружности радиуса R не меньше, чем проекция силы f на направление к центру окружности: $mV^2/R \geq f$. Подставляя сюда скорость из (3), а затем $\cos\alpha$ из (4), получим

$$f \leq \frac{mV^2}{R} = 2F(1-\cos\alpha) = 2F\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{f}{3F}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f}{F} \leq 2$$

Если это условие не выполняется, в момент выключения поля E тело не полетит прочь от шара, а вновь коснется его и продолжит скользить по нему. Можно заметить, что при $f/F = 2$ величина угла отрыва α обращается в 90^o. Физически это означает, что если сила f слишком большая, отрыв тела происходит лишь когда тело оказалось на "нижней" половиине шара, и сила F при это направлена так, что не прижимает тело к шару, а отрывает от него. В момент выключения силы F тело снова прижимется к шару – уже насовсем.

Предположим теперь, что $f/F < 2$. Оторвавшееся тело будет либо летать вокруг шара, либо удалится от него на бесконечно большое расстояние – если скорость тела в момент отрыва была достаточно велика, точнее, если она больше либо равна "второй космической скорости". Опрелить значение этой скорости можно по закону сохранения энергии. Кинетическая энергия тела в момент отрыва, $mV^2/2$ конкурирует с потенциальной энергией взаимодействия зарядов kqQ/R (напомним, потенциальная энегрия отрицательна, поскольку мы рассматриваем случай, когда Q и q и меют разные знаки). Если же тело удалилось от шара бесконечно далеко, его потенциальная энергия должна увеличиться до нуля за счет уменьшения кинетической энергии. Чтобы кинетической энергии хватило на обнуление потенциальной, в момент отрыва должно выполняться неравенство

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kQq}{R} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{2} - fR \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{R} \geq 2f.$$

Здесь мы учли $kQq = -fR^2$, верное из определения силы $f = k|Qq|/R^2$. Подставляя вместо mV^2/R выражения (3, 4), получим

$$2f \leq 2F(1-\cos\alpha) = 2F\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{f}{3F}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f}{F} \leq \frac{1}{2}$$

При $f/F = 1/2$ кинетической энергии только-только хватит на удаление от шара; этому соответствует удаление по параболической траектории. При $f/F < 1/2$ на бесконечном удалении от шара тело будет иметь некоторую кинетическую энергию; этому соответствует удаление по гиперболической траектории.

Осталось рассмотреть случай $1/2 < f/F < 2$. Тут, как мы показали, тело оторвется от шара, но не улетит от него на бесконечность. Как известно из аналогии с движением космических тел, движение будет происходить по эллиптической траектории. Расстояние L наибольшего удаления тела от центра шара можно при желании вычислить из законов сохранения:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kqQ}{R} = \frac{mu^2}{2} + \frac{kQq}{L}, \qquad uL = VR,$$

здесь мы обозначили скорость тела в точке наибольшего удаления (апогее) через u. Удобно снова переписать вклады kQq в виде $-fR^2$. Решая систему уравнений, получим $L = R(f+F)/(2f-F)$. Знаменатель выражения обращается в ноль (а ответ в бесконечность) при стремлении $f/F = 1/2$, что как упоминалось, соответствует бесконечному удалению по параболической траектории.

Случай одноименных зарядов Q и q, очевидно, соответствует отрицательной силе f. Можно просто считать, что $f = -kQq/R^2$, тогда знак силы f будет положительным для всех предыдущих формул, и станет отрицательным при одноименных зарядах. Формула для угла отрыва остается справедливой, пока тот не обращается в ноль (при $-1 < f/F < 0$). В противном случае тело отрывается от шара сразу. В любом случае, при разноименных зарядах тело всегда улетает от шара на бесконечное расстояние.

Итак, осталось лишь собрать все результаты для различных значений $z = f/F$ в ответ.

Ответ: Возможно несколько различных режимов движения, соответствующих разным значениям параметра $z = -kQq/(|q|ER^2)$.

I. При $z \in (-\infty, 1/2]$ тело улетает на бесконечное расстояние от шара.

- При $z < -1$ угол, характеризующий момент отрыва, равен нулю, тело отрывается сразу же.
- При $-2 < z \leq 1/2$ угол отрыва задается выражением $\alpha = \arccos(2/3 - f/(3F))$.

II. При $z \in (1/2, 2]$ угол отрыва задается той же формулой, но тело после отрыва движется вокруг шара по эллипсу, периодически удаляясь на максимальное расстояние $L = R(f + F)/(2F - f)$ от его центра.

- При $z \in (2, 5)$ тело, оторвется от шара, угол отрыва задается прежней формулой. Однако, сразу после выключения поля оно продолжит скользить по шару и больше не оторвется .
- При $z > 5$ поле не выключится, тело вообще не оторвется.

Районный тур 2013. 11 класс. II вариант

Задача 1.

Заметим, что и Заяц и Волк бегут прямолинейно.

Действительно, нарисуем некоторое расположение Волка и Зайца (точки В и З), построим их изображения в заборе (точки В* и З*) и изобразим векторы скоростей персонажей, направив их как это описано в условии. Эти вектора, очевидно, если их продолжить, проходят через точку О (см. рис. 1). Через малый промежуток времени Δt и Заяц, и Волк сместятся вдоль векторов своих скоростей, однако, при новых, смещенных положениях З$'$ и В$'$ точка О останется на месте. Значит, направление скорости Зайца и Волка через малый промежуток Δt не меняется. Но не изменится она и дальше, поскольку рассуждение справедливо при любом начальном расположении Зайца и Волка.

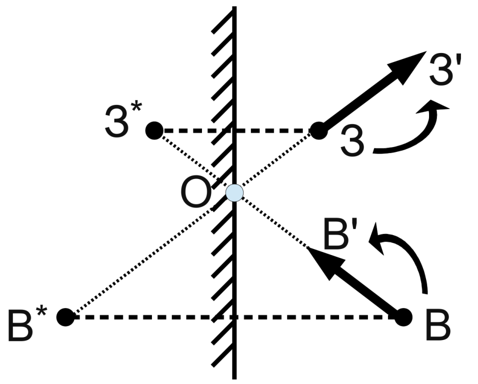

Рис. 1:

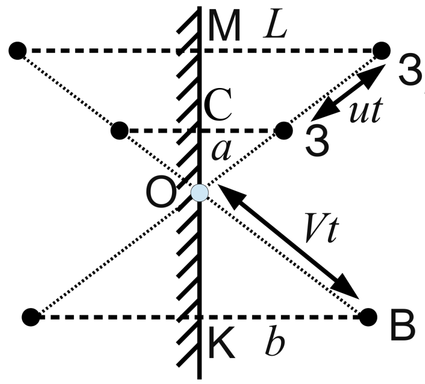

Рис. 2:

Изобразим конечное расположение Зайца З$_k$(см. рис. 2). Треугольники КВО, СЗО и МЗ$_k$О подобны и позволяют найти ответ.

Для этого обозначим искомое расстояние КВ через b, величину ОЗ через x, время движения Волка через t. Тогда

$$\text{КВ} : \text{ЗL} : \text{З}_k\text{М} = \text{ВО} : \text{ЗО} : \text{З}_k\text{О}$$

$$b : a : L = Vt : x : (x + ut).$$

Из этой системы уравнений находим $b = V(L - a)/u$.

Ответ: Волк находился на расстоянии $b = V(L - a)/u$ от забора.

Задача 2.

Сосуд тянет вниз сила тяжести, а удерживает в трубе сила трения, возникающая от того, что давление столба воды в сосуде распирает стенки вбок, в результате чего стенки давят на трубу с некоторой силой N (см. рис. 3, мы изобразили силу N в двух проекциях: вид сбоку и вид сверху, поскольку она неравномерно распределена по высоте вдоль стенок сосуда). Причина появления силы N – закон Паскаля.

Найдем величину суммарной по модулю силы N, с которой жидкость, налитая в сосуд радиуса R, давит на стенки. Давление жидкости увеличивается с глубиной: у поверхности воды оно равно нулю (атмосферным давлением в задаче предлагается пренебречь), а на глубине H оно равно $p_{max} = \rho g H$. Давление увеличивается линейно, поэтому на площади контакта трубы и сосуда $2\pi RH$ давление в среднем равно $p_{max}/2$. Действительно, для любого куска стенки, где давление больше, чем $p_{max}/2$ на величину Δp, найдется кусок такой же площади, где давление меньше, чем $p_{max}/2$ ровно на величину Δp. Понятно, что такие куски расположены симметрично относительно уровня $H/2$. Значит,

$$N = 2\pi R H p_{max}/2 = \pi \rho g R H^2.$$

Соответствующая этой силе давления стенок сила трения не может превзойти μN.

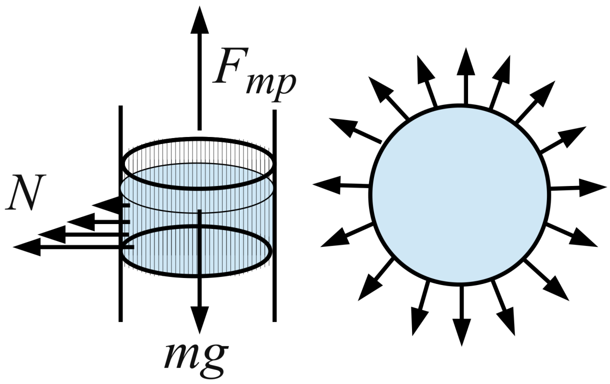

Рис. 3:

Масса воды в сосуде $M_0 = \rho V = \rho \pi R^2 H$, значит сила тяжести, действующая на сосуд с водой, равна $Mg + \rho \pi R^2 H g$. Соответственно, условие застревания сосуда в трубе принимает вид

$$Mg + \rho \pi R^2 H g \le \mu \pi R \rho g H^2.$$

Теперь нужно решить данное неравенство, содержащее квадратный трехчлен по R:

$$\rho \pi g H R^2 - \mu \pi \rho g H^2 R + Mg \le 0.$$

Удобным приемом в физике является обезразмеривание, оно позволит не сделать арифметических ошибок. Разделим все слагаемые неравенства на $\rho \pi g H$, максимально упростив вклад при квадратичном члене:

$$R^2 - \mu H R + \frac{Mg}{\rho \pi g H} \le 0$$

и введем безразмерный параметр $z = R/H$, который и будем искать. Еще раз разделим все уравнение на H^2:

$$z^2 - \mu z + a \le 0, \qquad \text{где } a = \frac{Mg}{\rho \pi g H^3}.$$

Корни неравенства $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4a})/2$ позволяют сразу выписать ответ

$$z \in \left(\frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4a}}{2}, \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4a}}{2}\right).$$

Осталось только выкинуть нефизические значения, соответствующие отрицательному дискриминанту, и привести в качестве ответа $R = Hz$.

Ответ: Радиус должен принадлежать промежутку $H(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4a})/2 \le R \le H(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4a})/2$, где $a = Mg/(\rho \pi H^3)$. Ответ существует лишь при $\mu^2/(4a) > 1$.

Задача 3.

Процесс, совершаемый газом, в любой момент удовлетворяет системе уравнений

$$(p + p_0)(V + V_0) = 16 p_0 V_0, \qquad pV = \nu R T. \tag{1}$$

Следует искать минимальное решение этой системы относительно переменной T.

Приведем вычисление этой задачи в безразмерных переменных. Разумеется, к верному ответу приведут и другие эквивалентные расчеты.

Введем $p' = p/p_0$ и $V' = V/V_0$ – безразмерные давление и объем. Температура T в этих переменных $T = p_0V_0p'V'/\nu R$ пропорциональна произведению $p'V'$. Первое уравнение системы (1) примет вид $(p'+1)(V'+1) = 16$ или $p'V' = 15 - (p'+V')$. Понятно, что температура максимальна, когда максимально произведение $p'V'$. Но это происходит тогда, когда то, что вычитается из 15 в этом выражении минимально, т.е. когда прямая $p'+V' = K$ имеет минимальный коэффициент K. Наоборот, при максимальном K температура системы минимальна. Выбрав произвольную точку на графике $p'(V')$, следует посмотреть, какая прямая множества $p'+V' = K$ проходит через нее: если наинизшая из возможных – это максимум температуры в процессе, если наивысшая – это минимум.

В безразмерных переменных график $p'(V')$ – симметричная относительно прямой $p' = V'$ гипербола – вогнутая кривая (см. рис. 4). , поэтому в точке $p' = V'$ она пересечется с самой нижней из обсуждаемого множества прямых. Решив $p'V' = 15-(p'+V')$ в предположении $p' = V'$, получим $p' = V' = 3$ (отрицательный корень отбрасываем), что соответствует температуре $T = 9p_0V_0/(\nu R)$.

Точка пересечения графика $p'(V')$ с наивысшей прямой вида $p'+V' = K$, очевидно, имеет место на границе промежутка, в котором меняется давление и объем системы. Пользуясь уравнением (1), найдем, что максимальному давлению $p' = 11$ соответсвует объем $V' = 1/3$, а максимальному объему $V' = 7$ – давление $p' = 1$. Сравнивая $p'+V'$ в этих точках, получим, что $11 + 1/3 > 1 + 7$, поэтому наинизшая температура наблюдается в точке, где $p' = 11$ $V' = 1/3$, т.е. при $T = p_0V_0p'V'/(\nu R) = 11p_0V_0/(3\nu R)$

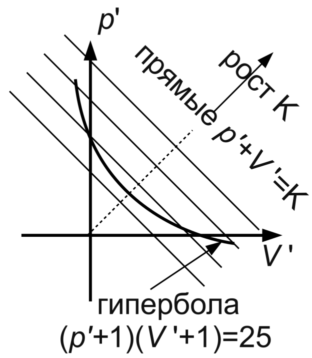

Рис. 4:

Ответ: $T_{max} = 9p_0V_0/(\nu R)$, $T_{min} = 11p_0V_0/(3\nu R)$.

Задача 4.

Пусть заряд вылетает из точки А под углом γ к оси Z ($\alpha \le \gamma \le \beta$). Представим движение заряда в магнитном поле как суперпозицию равномерного движения вдоль оси Z со скоростью $V\cos\gamma$ и равномерного движения по окружности со скоростью $V\sin\gamma$ в плоскости XY (см. рис. 5, 6).

Легко вычислить параметры, характеризующие движение системы по окружности. Сила Лоренца $qBV\sin\gamma$ направлена к центру окружности и обеспечивает центростремительное ускорение заряда $m(V\sin\gamma)^2/R$. Отсюда радиус окружности $R = mV\sin\gamma/(qB)$. Период, за который частица совершает полный оборот, равен

$$T = \frac{2\pi R}{V\sin\gamma} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Заметим, что этот период не зависит от γ, т.е. все частицы будут сталкиваться с детектором через одинаковые промежутки времени. Однако, частицы движутся вдоль оси Z с разными скоростями, поэтому ударяться в детектор они будут в разных точках. Для фиксированного γ расстояние, которое проходит частица между соударениями с детектором, $l = VT\cos\gamma$. Так как $\cos\beta \le \cos\gamma \le \cos\alpha$, точки детектора, в которые попадут шарики впервые после вылета, задаются координатами

$$l \in (l_{max}, l_{min}), \qquad \text{где } l_{min} = \frac{2\pi mV\cos\beta}{qB}, \quad l_{max} = \frac{2\pi mV\cos\alpha}{qB}.$$

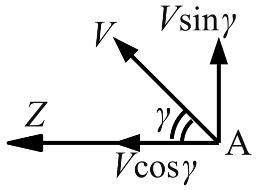

Рис. 5:

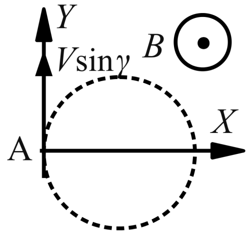

Рис. 6:

После упругого соударения каждая частица полетит от детектора с той же скоростью, какую она имела непосредственно перед ударом, причем угол, который эта скорость образует с осью Z, не изменится. Поэтому далее частицы будут возвращаться на детектор через равные расстояния l, являющиеся функцией угла вылета γ данной частицы.

Рассмотрим рис. 7, где жирной линией отмечены участки, в которых происходит соударение частиц с детектором AD. Видно, что промежутки детектора, куда частицы не попадают, сокращаются при удалении от A, а светящиеся промежутки увеличиваются. Так, например, во второй раз частицы попадут на участок $(2l_{min}, 2l_{max})$, а в n-тый раз – на участок (nl_{min}, nl_{max}) длиной $n(l_{max} - l_{min})$. Если при некотором n эта длина сравнялась или превзошла l_{max}, то неосвещенный участок детектора совсем пропадает:

$$n(l_{max} - l_{min}) \geq l_{max} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \frac{l_{max}}{l_{max} - l_{min}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos\beta} \simeq 3.88$$

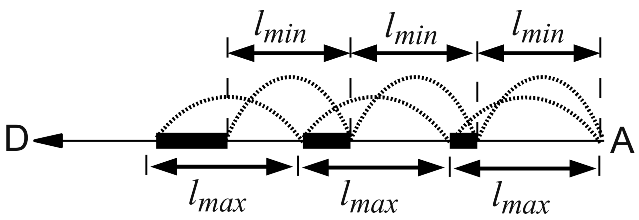

Рис. 7:

Значит, начиная с третьего удара о стержень, неосвещенный отрезок пропадает.

Ответ: Светиться будут участки детектора с координатами $(l_{min}, l_{max}) \cup (2l_{min}, 2l_{max}) \cup (3l_{min}, \infty)$, где $l_{min} = 2\pi mV\cos\beta/(qB)$, $l_{max} = 2\pi mV\cos\alpha/(qB)$.

Задача 5.

Рассмотрим пока случай, когда заряды q и Q имеют разные знаки. Пока тело не оторвалось от шара, на него будет действовать сила, равная по модулю $f = |kqQ|/R^2$, притягивающая тело к центру шара, и сила со стороны однородного поля, направленная вниз по рисунку и равная по модулю $F = |q|E$.

Под действием этих сил тело сдвигается по шару, постепенно разгоняясь. В некоторый момент (будем считать, что что в этот момент положение тела задается углом α, см. рис. 8) скорость движения тела по шару V станет такой большой, что тело оторвется. Этот момент характеризуется условием, что сумма проекций сил F и f на направление к центру окружности сравнялась с центростремительной силой mV^2/R:

$$\frac{mV^2}{R} = f + F\cos\alpha \tag{2}$$

Скорость, которую тело успело набрать к данному моменту, легко выразить из закона сохранения энергии, так как работу совершает только сила F, вдоль которой тело сдвинулось на расстояние $R(1-\cos\alpha)$:

$$\frac{mV^2}{2} = FR(1-\cos\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{R} = 2F(1-\cos\alpha) \tag{3}$$

Подставляя это значение в (2), получим

$$2F(1-\cos\alpha) = f + F\cos\alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} - \frac{f}{3F}. \tag{4}$$

Итак, при $f = 0$ тело оторвется при $\alpha \simeq 48^o$. С ростом f соответствующий косинус будет уменьшаться, а угол α увеличиваться. Заметим, что отрыв тела от шара вообще может не произойти – если полученный косинус окажется меньше -1. Это происходит при $f/F \geq 5$

Если отрыв произошел, по условию сила F моментально отключается, и на тело действует лишь сила притяжения к сфере. Воспользовавшись аналогией с движением спутника вокруг Земли, легко понять, что тело может

- упасть обратно на шар
- полететь вокруг шара по кругу
- полететь вокруг шара по эллипсу
- улететь от шара по параболе
- улететь от шара по гиперболе

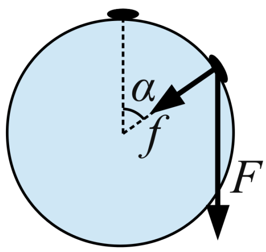

Рис. 8:

Тело не упадет обратно на шар, если в момент отрыва и выключения внешнего поля оно имело "первую космическую" скорость, точнее, ее электростатический аналог. Скорость эта достиается, если центростремительная сила mV^2/R при движении по окружности радиуса R не меньше, чем проекция силы f на направление к центру окружности: $mV^2/R \geq f$. Подставляя сюда скорость из (3), а затем $\cos\alpha$ из (4), получим

$$f \leq \frac{mV^2}{R} = 2F(1-\cos\alpha) = 2F\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{f}{3F}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f}{F} \leq 2$$

Если это условие не выполняется, в момент выключения поля E тело не полетит прочь от шара, а вновь коснется его и продолжит скользить по нему. Можно заметить, что при $f/F = 2$ величина угла отрыва α обращается в 90^o. Физически это означает, что если сила f слишком большая, отрыв тела происходит лишь когда тело оказалось на "нижней" половиине шара, и сила F при это направлена так, что не прижимает тело к шару, а отрывает от него. В момент выключения силы F тело снова прижимется к шару – уже насовсем.

Предположим теперь, что $f/F < 2$. Оторвавшееся тело будет либо летать вокруг шара, либо удалится от него на бесконечно большое расстояние – если скорость тела в момент отрыва была достаточно велика, точнее, если она больше либо равна "второй космической скорости". Опрелить значение этой скорости можно по закону сохранения энергии. Кинетическая энергия тела в момент отрыва, $mV^2/2$ конкурирует с потенциальной энергией взаимодействия зарядов kqQ/R (напомним, потенциальная энегрия отрицательна, поскольку мы рассматриваем случай, когда Q и q и меют разные знаки). Если же тело удалилось от шара бесконечно далеко, его потенциальная энергия должна увеличиться до нуля за счет уменьшения кинетической энергии. Чтобы кинетической энергии хватило на обнуление потенциальной, в момент отрыва должно выполняться неравенство

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kQq}{R} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{2} - fR \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{mV^2}{R} \geq 2f.$$

Здесь мы учли $kQq = -fR^2$, верное из определения силы $f = k|Qq|/R^2$. Подставляя вместо mV^2/R выражения (3, 4), получим

$$2f \leq 2F(1-\cos\alpha) = 2F\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{f}{3F}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{f}{F} \leq \frac{1}{2}$$

При $f/F = 1/2$ кинетической энергии только-только хватит на удаление от шара; этому соответствует удаление по параболической траектории. При $f/F < 1/2$ на бесконечном удалении от шара тело будет иметь некоторую кинетическую энергию; этому соответствует удаление по гиперболической траектории.

Осталось рассмотреть случай $1/2 < f/F < 2$. Тут, как мы показали, тело оторвется от шара, но не улетит от него на бесконечность. Как известно из аналогии с движением космических тел, движение будет происходить по эллиптической траектории. Расстояние L наибольшего удаления тела от центра шара можно при желании вычислить из законов сохранения:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kqQ}{R} = \frac{mu^2}{2} + \frac{kQq}{L}, \qquad uL = VR,$$

здесь мы обозначили скорость тела в точке наибольшего удаления (апогее) через u. Удобно снова переписать вклады kQq в виде $-fR^2$. Решая систему уравнений, получим $L = R(f+F)/(2f-F)$. Знаменатель выражения обращается в ноль (а ответ в бесконечность) при стремлении $f/F = 1/2$, что как упоминалось, соответствует бесконечному удалению по параболической траектории.

Случай одноименных зарядов Q и q, очевидно, соответствует отрицательной силе f. Можно просто считать, что $f = -kQq/R^2$, тогда знак силы f будет положительным для всех предыдущих формул, и станет отрицательным при одноименных зарядах. Формула для угла отрыва остается справедливой, пока тот не обращается в ноль (при $-1 < f/F < 0$). В противном случае тело отрывается от шара сразу. В любом случае, при разноименных зарядах тело всегда улетает от шара на бесконечное расстояние.

Итак, осталось лишь собрать все результаты для различных значений $z = f/F$ в ответ.

<u>Ответ</u>: Возможно несколько различных режимов движения, соответствующих разным значениям параметра $z = -kQq/(|q|ER^2)$.

I. При $z \in (-\infty, 1/2]$ тело улетает на бесконечное расстояние от шара.

- При $z < -1$ угол, характеризующий момент отрыва, равен нулю, тело отрывается сразу же.
- При $-2 < z \leq 1/2$ угол отрыва задается выражением $\alpha = \arccos(2/3 - f/(3F))$.

II. При $z \in (1/2, 2]$ угол отрыва задается той же формулой, но тело после отрыва движется вокруг шара по эллипсу, периодически удаляясь на максимальное расстояние $L = R(f + F)/(2F - f)$ от его центра.

- При $z \in (2, 5)$ тело, оторвется от шара, угол отрыва задается прежней формулой. Однако, сразу после выключения поля оно продолжит скользить по шару и больше не оторвется .
- При $z > 5$ поле не выключится, тело вообще не оторвется.