

### 11 класс. Задача 1

Можно доказать, что сразу после первого отскока шарик снова будет иметь скорость  $V$ . Действительно, перейдем в систему отсчета, движущуюся вверх со скоростью  $u$ . Вычитая для этого из скоростей  $u$ , получим, что в этой системе отсчета плита покоится, а шарик имеет начальную скорость  $V - u$ . Значит, перед первым ударом шарик также будет иметь скорость  $V - u$ , но направленную вниз. Удар абсолютно упругий, поэтому и после отскока от плиты в этой системе отсчета шарик будет иметь скорость  $V - u$ . Возвращаясь в исходную неподвижную систему отсчета (прибавляя  $u$ ) получаем, что скорость шарика после отскока равна  $V$ .

Заметим, что этот факт можно получить и в неподвижной системе отсчета, правда в ней придется учесть, что при абсолютно упругом ударе о движущуюся стенку, скорость шарика меняется на величину, равную удвоенной скорости стенки (скорость шарика увеличивается, если стенка движется ему навстречу и уменьшается в противном случае). Поэтому в неподвижной системе оказывается, что перед первым ударом о плиту шарик имел скорость  $V - 2u$ . Понятно, что после удара о движущуюся вверх плиту эта скорость увеличится как раз до величины  $V$ .

Дальнейшие рассуждения выполним в неподвижной системе отсчета.

Найдем время  $t_1$ , которое пройдет с начала движения до первого удара шарика. За это время скорость шарика изменилась с  $V$ , направленной вверх, до  $(V - 2u)$ , направленной вниз. Значит, изменение вертикальной проекции скорости составило  $V - (-(V - 2u)) = 2(V - u)$ . С другой стороны, скорость меняется с ускорением  $g$ , т.е.

$$2(V - u) = gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2(V - u)/g.$$

Таким образом, к моменту первого удара плита сдвинулась вверх из исходного положения на  $ut_1$

Как было доказано, после первого удара шарик имеет ровно ту же начальную скорость, а вот плита теперь движется вниз. Рассматривая движение шарика начиная с момента первого удара, мы должны будем повторить все рассуждения, заменив  $u$  на  $-u$  во всех формулах выше. Значит, и после второго удара скорость шарика окажется равной  $V$ , а время между первым и вторым ударами составит

$$t_2 = 2(V + u)/g.$$

За это время плита опустится на  $ut_2$ . Так как  $t_2 > t_1$ , к моменту  $\tau = t_1 + t_2 = 4V/g$  плита окажется ниже исходного положения на  $x = u(t_2 - t_1) = 4u^2/g$ .

Снова и снова повторяя эти рассуждения, получим, что за каждый промежуток  $\tau$  плита смещается вниз на  $x$ . Средняя скорость за большой промежуток времени  $T$  будет стремиться к  $x/T = u^2/V$ . Действительно,  $T$  всегда можно представить в виде  $T = n\tau + \Delta t$ , где  $n$  - целое число периодов  $\tau$ , укладывающихся в  $T$ , а  $\Delta t < \tau$ . За это время плита сдвинется на  $L = nx + \Delta x$ , где  $\Delta x < x$ . Отсюда

$$v_{cp} = \frac{L}{T} = \frac{nx + \Delta x}{n\tau + \Delta t} = \frac{x + \Delta x/n}{\tau + \Delta t/n}.$$

С ростом  $n$  последние слагаемые в числителе и знаменателе постепенно исчезают, так что при вычислении средней скорости за большое время получим именно  $x/\tau$ .

Ответ: Средняя скорость равна  $u^2/V$  и направлена вниз.

### 11 класс. Задача 2

Будем задавать координаты изображений, отсчитывая их от точки соприкосновения чашки и плоского зеркала. Ось координат  $z$  направим вниз; из симметрии понятно, что все изображения источника будут лежать где-то на этой оси.

Часть лучей от источника отразятся от плоского зеркала, поэтому система породит мнимое изображение в точке с координатой  $z_0 = -a$ . Это просто изображение источника в плоском зеркале (см. рис. 1). Знак "минус" показывает, что изображение находится "за зеркалом", т.е. является мнимым. Напомним, что мнимое изображение - это точка, в которой пересекаются не сами лучи, а их продолжения.

Часть лучей пройдут плоское зеркало насквозь. Далее световой поток снова делится на две части. Рассмотрим их по порядку.

- Свет может отразиться от сферической поверхности (см. рис. 2). Известно, что сферическое выпуклое зеркало радиуса  $R$  "работает" как рассеивающая линза с фокусным расстоянием  $F = R/2$ , то есть в результате получится изображение, координаты которого дает формула тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F},$$

где  $a$  - координата источника,  $b$  - координата изображения, а  $-1/F$  - оптическая сила сферического зеркала (знак "минус" отражает тот факт, что зеркало выпуклое, рассеивающее). Выразив отсюда  $b$ ,

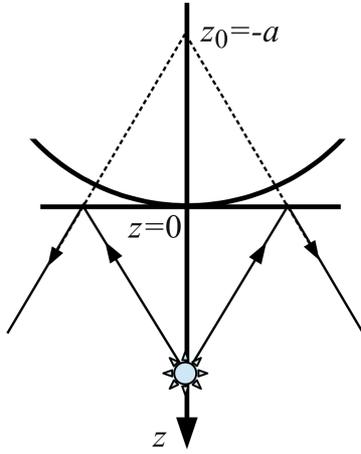


Рис. 1.

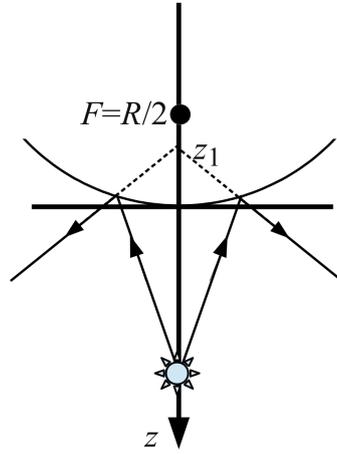


Рис. 2.

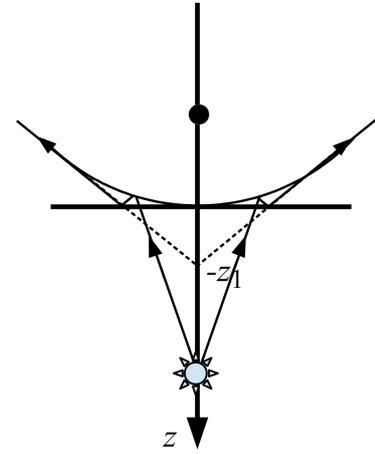


Рис. 3.

получим координату изображения

$$z_1 \equiv b = -\frac{Fa}{F+a} = -\frac{Ra}{R+2a} < 0. \quad (1)$$

Координата снова получилась отрицательной, это значит, что если рассматривать сферическое зеркало со стороны источника, изображение снова лежит за зеркалом, т.е. снова мнимое.

- Если свет проходит сквозь сферическую поверхность, он не взаимодействовал с зеркалами вообще, и изображений не создаст.

Рассмотрим свет, отразившийся от сферы. Падая на плоскость, он снова делится на две части. Поток, проходящий плоскость насквозь, уже рассмотрен на рис. 2. Поток же, отразившийся от плоскости, создает изображение в точке с координатами  $-z_1 > 0$ : мнимое изображение  $z_1$  отражается от плоскости. Данное изображение также будет мнимым (см. рис. 3).

Далее свет может отразиться от сферы второй раз. При этом фактически, рассеяв свет дважды, зеркало работает как система с оптической силой  $-2/F$ , поэтому изображение получится в точке с координатой

$$z_2 = -\frac{Ra}{R+4a} < 0$$

(эта формула получается из (1) заменой  $F$  на  $F/2$  и, соответственно,  $R$  на  $R/2$ ).

Повторяя рассуждения, получим, что свет, отразившись  $n$  раз от сферы, сформирует мнимое изображение в точке

$$z_n = -\frac{Ra}{R+2na}. \quad (2)$$

Последующее отражение доли этого света в плоскости даст изображение в точке  $-z_n$ .

**Ответ:** Все изображения мнимые, координаты  $z_n$  задаются формулой (2) при  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Кроме того, для  $n > 0$  существуют мнимые изображения в точках  $-z_n$ .

### 11 класс. Задача 3

Изобразим на диаграмме  $p(V)$  описанный циклический процесс (см рис. 4). Обозначим начальные параметры газа – давление, объем и температуру – через  $p_1, V_1, T_1$ ; пусть количество вещества газа равно  $\nu$ , при этом, разумеется,  $p_1 V_1 = \nu R T_1$ .

Участок 1-2 соответствует изохорическому нагреванию, в ходе которого давление газа увеличивается в 2 раза. Участок 2-3 соответствует изобарическому нагреванию, в ходе которого объем газа увеличивается в 3 раза.

Далее газ по условию расширяется в вакуум. Данный процесс, очевидно, не является квазистатическим: такое расширение невозможно осуществить медленно. По условию задачи в этом расширении газ не получает теплоту – контейнер теплоизолирован в данном процессе. Но и работу в этом процессе газ совершить не может: для этого нужны внешние силы, против которых работа будет совершаться (например, при изобарическом расширении работа газа совершается против силы тяжести, действующей на поршень, либо против сил атмосферного давления, либо против любой другой силы, которая удерживает поршень в сосуде). При расширении в вакуум газ *не совершает работы*.

Мы получили, что в процессе 3-4 газ не совершает работы и не получает теплоты. Значит, по первому началу термодинамики, внутренняя энергия газа осталась постоянной. При этом температура газа также не может измениться.

Итак, точки 3 и 4 лежат на одной изотерме. Обратите внимание, что, несмотря на это, данный процесс нельзя назвать изотермическим, ведь он не является квазиравновесным, так что понятие "температура газа" в промежутке между точками 3 и 4 просто не определена. По этой же причине работа газа между точками 3 и 4 не соответствует работе газа в изотермическом процессе (площади под пунктирной изотермой на графике  $p(V)$ ).

Далее, участок 4-5 соответствует изохорическому охлаждению, в ходе которого давление газа уменьшилось до первоначального; наконец, участок 5-1 соответствует возвращению газа в исходное состояние.

Написав уравнение Клапейрона-Менделеева для всех точек, легко расставить значения давлений, объемов и температур на полученном графике. Так, например, в точке 3 давление и объем будут равны по условию  $p_3 = 2p_1$ ,  $V_3 = 3V_1$  (и, следовательно, температура будет  $6T_1$ ). В точке 4 температура останется той же, а объем станет равным  $V_4 = 4V_1$ , значит давление будет равно  $p_3 V_3 / V_4 = 3p_1 / 2$ . Мы подписали около каждой точки соответствующую ей температуру, выразив ее через минимальную температуру в цикле  $T_1$  (см. рис. 4).

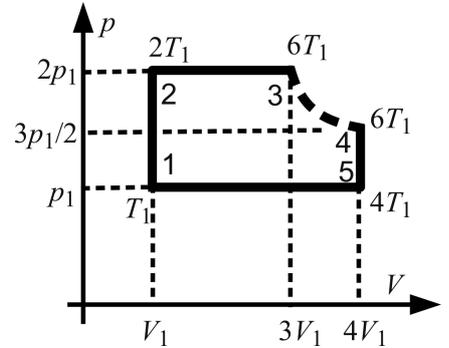


Рис. 4.

Вычислим работу  $A$  газа за цикл. На участках 1-2, 3-4, 4-5 газ работы не совершает. На участке 2-3 работа газа положительна и численно равна площади под процессом 2-3, т.е.  $4p_1 V_1$ . На участке 5-1 работа газа отрицательна и численно равна площади под процессом 5-1, т.е.  $-3p_1 V_1$ . Итого, газ совершает за цикл работу  $A = 4p_1 V_1 - 3p_1 V_1 = p_1 V_1$ .

Найдем теплоту  $Q$ , которую газ получил в течение цикла. На участке 3-4 газ теплоту не получает; на участках 4-5 и 5-1 он ее отдает. Газ получает теплоту на участке 1-2, причем, так как это – изохорическое нагревание на  $T_2 - T_1 = T_1$ , данная теплота равна  $3\nu RT_1 / 2$ . Также газ получает теплоту на участке 2-3, причем, так как это – изобарическое нагревание на  $T_3 - T_2 = 4T_1$ , данная теплота равна  $5\nu R(4T_1) / 2 = 10\nu RT_1$ .

КПД тепловой машины равен по определению

$$\frac{A}{Q} = \frac{2p_1 V_1}{23\nu RT_1} \cdot 100\% = \frac{2}{23} \cdot 100\% \simeq 8.7\%$$

Ответ: КПД равен 8.7%.

#### 11 класс. Задача 4

Будем для определенности считать заряды бусинок и нити положительными. Рассмотрим левую половину нити (на рис. 5 выделена серым).



Рис. 5.

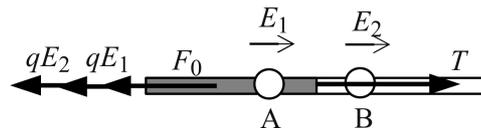


Рис. 6.

Первоначально на нее действуют две внешние силы: сила натяжения со стороны правой половины нити  $T_0$  и сила электростатического отталкивания от правой половины нити  $F_0$ . Эти силы должны компенсировать друг друга, так как нить первоначально лежит на столе неподвижно. Итак,  $F_0$  по модулю равна  $T_0$ .

Когда на нить надели бусинки, половинки нити отталкиваются с прежней силой  $F_0$ , поскольку заряд нити не изменился. Однако каждая заряженная бусина действует дополнительно на рассматриваемую (левую) половину нити, поэтому сила натяжения должна теперь измениться.

Обозначим через  $E_1$  напряженность, создаваемую левой половиной нити в точке А, где расположена левая бусина, а через  $E_2$  – напряженность, создаваемую левой половиной нити в точке В, где расположена правая бусина (см. рис. 6).

По третьему закону Ньютона сила, с которой каждая бусина действует на рассматриваемую половину нити равна по модулю и противоположна по направлению силам  $qE_1$  и  $qE_2$ , с которыми эта половина нити действует на бусинки. Итак, условием равновесия левой половины нити теперь будет

$$T = F_0 + q(E_1 + E_2). \tag{3}$$

Найдем  $E_1$  – напряженность левого куска нити в точке А. Из симметрии задачи понятно, что  $E_1$  параллельна нити. Координатную ось направим вправо, так что напряженность считаем положительной, если она направлена вправо.

Пусть электрический потенциал от левого куска нити в точке А равен  $\varphi$ . Рассмотрим точку А', сдвинутую от А по полю на малую величину  $\Delta x$ . Потенциал куска нити  $\varphi'$  в А' меньше, чем  $\varphi$  на  $E_1\Delta x$ , поэтому

$$E_1 = \frac{\varphi - \varphi'}{\Delta x}, \quad (4)$$

и задача о нахождении напряженности свелась к нахождению *разности* потенциалов.

Придумаем систему зарядов, чтобы она создавала в точке А потенциал, в точности равный  $\Phi = \varphi - \varphi'$ . Если наш кусок нити сдвинуть из исходного положения влево на  $\Delta x$  и сменить знак его заряда, то в точке А он будет создавать потенциал  $-\varphi'$  (см. рис. 7, сдвинутый кусок нити заштрихован). Легко понять, что искомая система зарядов должна состоять из исходного куска и описанного сдвинутого куска с измененным знаком заряда, ведь по принципу суперпозиции потенциал такой системы  $\Phi$  в точке А складывается из потенциалов двух кусков,  $\varphi$  и  $-\varphi'$ .

Однако, так расположенные куски компенсируют свой заряд во всех точках, где нити накладываются, т.е. везде, кроме хвостиков нити длиной  $\Delta x$  по краям (см. рис. 7) с зарядами  $\Delta q = Q\Delta x/L$ . Итак, достаточно посчитать потенциал, который хвостики создают в точке А. Выбирая  $\Delta x$  малым, получим, что размеры этих хвостиков малы по сравнению с расстояниями от них до точки А. Значит, вычисляя потенциал от хвостиков в точке А, можно пользоваться приближением для потенциалов точечных зарядов, находящихся от А на расстояниях  $l/2$  и  $(L-l)/2$  т.е.

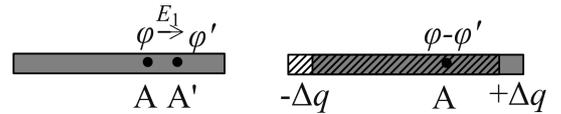


Рис. 7.

$$\Phi = \varphi - \varphi' = \frac{kQ\Delta x/L}{l/2} - \frac{kQ\Delta x/L}{(L-l)/2} = \frac{2kQ\Delta x}{L} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L-l} \right).$$

Подставляя это в (4), найдем

$$E_1 = \frac{2kQ}{L} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L-l} \right).$$

Заметьте, это выражение может иметь различный знак, в зависимости от соотношения  $L$  и  $l$ ; при  $L = 2l$  оно меняет знак.

Рассуждая точно также, найдем напряженность  $E_2$ :

$$E_2 = \frac{2kQ}{L} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L+l} \right),$$

вычисления здесь снова сведутся к потенциалам двух точечных зарядов, на расстояниях  $l/2$  и  $(L+l)/2$ . Заметим,  $E_2$  всегда положительна.

Подставляя результат в (3), получим ответ.

Ответ: Натяжение нити равно

$$T = T_0 + \frac{2kQq}{L} \left( \frac{2}{l} - \frac{1}{L-l} - \frac{1}{L+l} \right).$$

### 11 класс. Задача 5

Поскольку частица движется в плоскости  $xy$ , магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Рассмотрим сначала  $t < t_A$ .

Перейдем в систему отсчета, движущуюся по оси  $y$  со скоростью  $\vec{v}_{отн} = 2u$ . Чтобы сделать это, следует в каждый момент времени вычесть вектор  $\vec{v}_{отн}$  из скорости частицы  $\vec{V}$ . Построим график  $V_x(V_y)$  на интервале  $t < t_A$  в этой системе отсчета (см. рис. 8): понятно, что полуокружность сдвинется здесь вправо так, что ее центр окажется в начале координат.

Данная система отсчета является инерциальной, значит в каждый момент времени полная сила, действующая на частицу, в этой системе такая же, как в покоящейся относительно экспериментатора. В неподвижной системе отсчета на частицу действовала сила Лоренца  $F_\Lambda$ , равная по модулю  $qB_0V$ , и электростатическая сила  $qE$ . В движущейся системе отсчета скорость частицы равна

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}_{отн},$$

а сила Лоренца оказалась равна  $F'_\Lambda$ , при этом она, очевидно, изменилась:

$$\vec{F}'_\Lambda = \vec{F}_\Lambda - \Delta\vec{F}.$$

Понятно, что вектор  $\Delta\vec{F}$  равен по модулю  $qv_{\text{отн}}B_0$  и правилу левой руки перпендикулярен и  $\vec{v}_{\text{отн}}$ , и магнитному полю, т.е. направлен против оси  $x$ , см рис. 9. Так как полная сила, действующая на частицу, измениться от перехода в другую инерциальную систему не может, электростатическая сила в этой системе отсчета должна увеличиться ровно на  $\Delta\vec{F}$ , т.е. напряженность электрического поля должна увеличиться на вектор  $\Delta\vec{F}/q$  длиной  $2B_0u$ , направленный против оси  $x$ . Итак, мы доказали, что при переходе в движущуюся систему отсчета однородное магнитное поле порождает однородное электрическое.

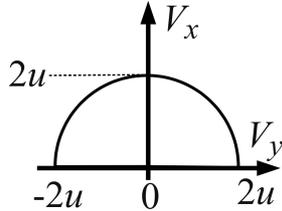


Рис. 8.

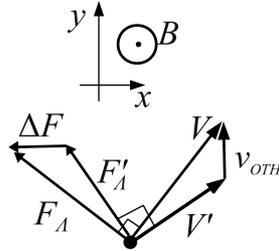


Рис. 9.

Можно убедиться, что в данной движущейся системе отсчета при  $t < t_A$  напряженность электрического поля равна нулю. Действительно, из рис. 8 следует, что скорость частицы постоянна по модулю. Значит, на частицу не действует электрическая сила, ведь она изменяла бы ее потенциал, и вместе с тем скорость. Итак, частица движется в этой системе отсчета по окружности.

Переходя в исходную систему отсчета, получим, что к нулевой напряженности следует добавить вектор  $2B_0u$ , направленный вдоль оси  $x$ . Траектория частицы в этой системе координат превратится в циклоиду.

Аналогично можно рассмотреть вторую полуокружность, перейдя в систему отсчета, движущуюся вдоль оси  $y$  со скоростью  $3u$ . В ней график  $V_x(v_y)$  при  $t > t_A$  снова имеет вид полуокружности с центром в начале координат. Мы уже видели, что это означает, что электрического поля в данной системе отсчета нет. Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, мы приобретем напряженность  $E = 24B_0u$ , направленную вдоль оси  $x$ .

**Ответ:** электрическое поле однородно, направлено вдоль оси  $x$ . При  $t < t_A$  его напряженность равна  $2B_0u$ ; при  $t < t_A$  она увеличивается до  $24B_0u$ .

**Примечание.** При переключении магнитного поля в системе по закону электромагнитной индукции Фарадея возникает вихревое электрическое поле  $E(r)$ , напряженность которого зависит от расстояния до центра вихря. Например, рассматривая вихрь на расстоянии  $r$  от центра, удобно выбрать в качестве контура окружность радиуса  $r$ , тогда закон примет вид  $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\tau$ , где  $\mathcal{E} = 2\pi rE$  – ЭДС в круговом контуре,  $\Delta\Phi = 7B_0\pi r^2$  – изменение магнитного потока через контур  $\tau$  – время, за которое переключают магнитное поле. Отсюда величина этого поля  $E(r) = \Delta\Phi/(2\pi r\tau) = 7B_0\pi r^2/(2\pi r\tau) = 7B_0r/(2\tau)$ .

Итак, в  $\tau$ -окрестности момента  $t_A$  напряженность магнитного поля зависит от точки пространства  $r$  и от того, как быстро переключают магнитное поле. Независимо от того, насколько мало  $\tau$ , импульс электрической силы вихревого поля  $qE$  "успеет" изменить импульс частицы на конечную величину  $qE\tau = 7B_0r/2$ . При этом если  $\tau$  мало, частица в момент  $t_A$  "прыгнет" в другую точку графика  $V_x(V_y)$ , если только в этот момент времени она не оказалась случайно ровно в центре вихря (когда  $r = 0$ ).

Интересно, что согласно ответу задачи, внешнее электрическое поле резко изменяют в момент  $t_A$ . Оказывается, что при этом образуется вихревое магнитное поле, и, если вихревое электрическое поле скачком меняло скорость частицы, вихревое магнитное скачком ее поворачивает.

Глядя на график из условия, видим, что в точке А нет ни изломов, ни скачков. Так может быть, лишь если в момент  $t_A$  частица оказалась ровно на оси обсуждаемого электромагнитного вихря, положение которой определяется граничными условиями, не оговоренными в условии задачи.