Районный тур 2013. 10 класс. I вариант

Задача 1.

Средняя скорость, по определению, есть отношение длины пути, пройденного телом, ко времени, за которое этот путь был пройден.

Определим, за какое время τ частица перемещается от одной ловушки до другой:

$$L = \frac{a\tau^2}{2} \Leftrightarrow \tau = \sqrt{\frac{2L}{a}}.$$

Следовательно, средняя скорость движения частицы между двумя соседними ловушками равна

$$v_{\text{ср}1} = \frac{L}{\tau} = \frac{L}{\sqrt{2L/a}} = \sqrt{\frac{La}{2}}.$$

Заметим, что, поскольку после попадания в ловушку скорость частицы каждый раз обнуляется, ее движение между любыми двумя соседними ловушками происходит все время одинаково. Если рассчитывать среднюю скорость частицы за время T, сравнимое по величине с временем ее движения между ловушками τ, то ответ, очевидно, будет зависеть от T или, что тоже самое, от того, где именно находится в данный момент частица. Ясно также, что для времен $T = n\tau$ (n — натуральное число) средняя скорость всегда будет равна $v_{\text{ср}1}$, так как в данном случае пройденный частицей путь будет равен $S = nL$, и

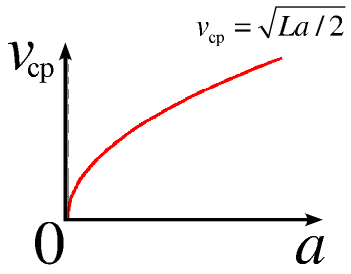

Рис. 1:

$$v_{\text{ср}n} = \frac{nL}{n\tau} = \frac{L}{\tau} = v_{\text{ср}1}.$$

За “промежуточные” времена T, когда $T \in (n\tau, (n+1)\tau)$, значение средней скорости будет отличаться от $v_{\text{ср}1}$, так как частица все же двигается неравномерно. Однако, ясно, что, чем больше отношение T/τ, тем меньше величина средней скорости частицы за время T будет отличается от $v_{\text{ср}1}$. Действительно, пусть за время T частица прошла путь S, тогда эти величины можно представить в виде

$$S = nL + s, \quad T = n\tau + t,$$

где $s < L$ и $t < \tau$. Тогда средняя скорость за время T равна

$$v_{\text{ср}T} = \frac{S}{T} = \frac{nL+s}{n\tau+t} = \frac{nL}{n\tau} \cdot \frac{1+\dfrac{s}{nL}}{1+\dfrac{t}{n\tau}} = v_{\text{ср}1} \cdot \frac{1+\dfrac{s}{L}\cdot\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{t}{\tau}\cdot\dfrac{1}{n}} \approx v_{\text{ср}1} \cdot \left(1 + \left(\frac{s}{L} - \frac{t}{\tau}\right)\cdot\frac{1}{n}\right) + \ldots \qquad (1)$$

При увеличении n последняя дробь в (1) все меньше отличается от единицы. Поэтому очевидно, что искомая средняя скорость частицы за время много большее времени ее движения между ловушками попросту совпадает со средней скоростью движения частицы от ловушки до ловушки $v_{\text{ср}1}$.

Остается только нарисовать график зависимости средней скорости от величины ускорения a. Соответствующий график представлен на рисунке 1.

<u>Ответ:</u> Средняя скорость равна $\sqrt{La/2}$. График представлен на рисунке 1

Задача 2.

В данной задаче представляет интерес лишь подсчёт силы, оказываемой непосредственно водой на дно и стенки без учёта вклада атмосферного давления.

Сила давления на дно сосуда находится из соображений вертикального равновесия системы. Назовём силу давления воды на дно $\vec{F}_{\text{дно}}$. Тогда сила реакции опоры, действующая со стороны дна на воду, противоположна силе давления и равна $-\vec{F}_{\text{дно}}$. Запишем второй закон Ньютона для воды в проекции на вертикальную ось, направленную вниз. Поскольку в данной задаче параллельно этой оси действуют только сила тяжести и сила реакции опоры, то

$$mg + (-F_{\text{дно}}) = 0, \tag{2}$$

где $m = \rho lbh$ — масса воды, а ось направлена вниз. Другие силы, действующие на воду — силы реакции со стороны стенок, — направлены горизонтально как в состоянии покоя, так и в процессе ускорения. Поэтому уравнение (2) верно и во время движения, и

$$F_{\text{дно}} = \rho blhg \tag{3}$$

есть ответ на первый вопрос задачи.

Для нахождения силы давления воды на стенку CD перейдём в неинерциальную систему отсчёта (НИСО), связанную с аквариумом, т.е. движущуюся с ускорением $\vec{a}$ вправо. В такой НИСО на любое тело массы m действует сила $-m\vec{a}$. Поэтому можно говорить, что на все массивные тела в этой НИСО находятся в поле «модифицированной силы тяжести» с «модифицированным ускорением свободного падения» $\vec{g'} = -\vec{a} + \vec{g}$.

Как известно, в состоянии покоя поверхность воды перпендикулярна ускорению свободного падения. В нашей НИСО в качестве такового следует рассматривать $\vec{g'}$, так что поверхность воды будет образовывать угол α с горизонталью, где $tg\, \alpha = a/g$ (см. Рис. 2). В дальнейшем нам потребуется использовать высоту воды при правой стенке CD. При отклонении уровня воды от $O'O''$ до PQ ее объем не меняется, поэтому треугольники POO' и O"OQ будут равны. Тогда уровень воды при правой стенке CD будет равен

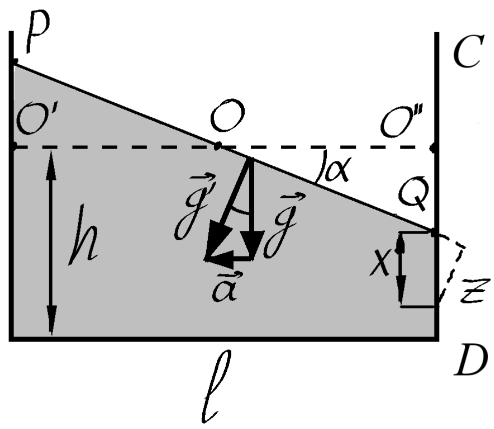

Рис. 2:

$$|QD| = h - \frac{l}{2} tg\, \alpha = h - \frac{la}{2g}, \tag{4}$$

Давление воды на одном и том же расстоянии от поверхности будет одинаково и равно $\rho g' z$. Найдём давление вблизи правой стенки на глубине x (см. Рис. 2). Расстояние до поверхности воды будет $z = x \cos\alpha$, при этом $\cos\alpha = g/g'$. Так что

$$p(x) = \rho g' z = \rho g' x \cos\alpha = \rho g x. \tag{5}$$

Следовательно, давление на глубине x будет таким же, как если бы вода покоилась в наклонном положении в инерциальной системе отсчета. Таким образом, задача сводится к подсчёту силы давления водяного столба высотой $|QD|$ на вертикальную стенку ширины b в обычном поле тяжести. Давление с глубиной меняется линейно, поэтому среднее значение давления на стенку равно давлению на половине высоты водяного столба ($\rho g|QD|/2$). Тогда сила давления равна

$$F_{\text{бок}} = \left(\rho g \frac{|QD|}{2}\right) \cdot (|QD| b) = \frac{1}{2} \rho g \left(h - \frac{la}{2g}\right)^2 b. \tag{6}$$

Однако данная формула справедлива лишь для случая, когда ускорение $\vec{a}$ достаточно мало для того, чтобы вода касалась правой стенки CD аквариума. Если же ускорение будет слишком сильным, то вода отойдёт от правой стенки (см. Рис. 3). Тогда сила давления воды на правую стенку станет равна нулю $F_{\text{бок}} = 0$. Условием реализации такого случая является

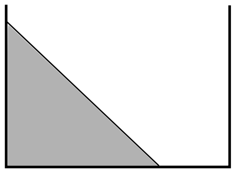

Рис. 3:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{g} \geq \frac{2h}{l},$$

т.е.

$$a \geq 2g\frac{h}{l}. \tag{7}$$

Объединяя (6) и случай (7), можно записать

$$F_{\text{бок}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho g\left(h - \frac{la}{2g}\right)^2 b, & a < 2g\frac{h}{l}; \\ 0, & a \geq 2g\frac{h}{l}. \end{cases}, \tag{8}$$

что есть ответ на второй вопрос.

Ответ: За вычетом атмосферного давления, давление воды на дно сосуда равно $\rho blhg$. Давление на стенку CD дается выражением (8).

Задача 3.

Рассмотрим условия того, что система находится в покое. На рисунке 4 изображены все силы, приложенные к ящику (зеленые стрелки) и к стержню OA (синие стрелки). Обратите внимание, что сила реакции R в шарнире в общем случае направлена не вдоль стержня.

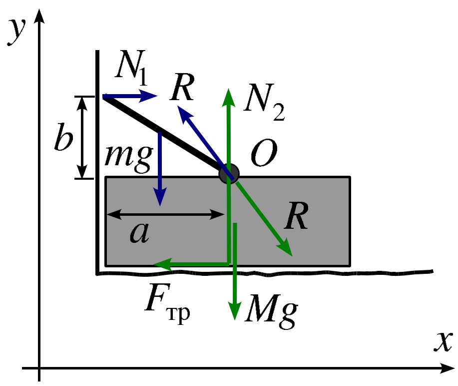

Рис. 4:

Введем оси, как показано на рисунке. Обозначим величины проекций силы R на оси x и y через R_x и R_y соответственно.

Выпишем второй закон Ньютона для стрежня в проекциях на оси x и y:

$$N_1 - R_x = 0, \quad R_y - mg = 0.$$

Поскольку стержень не вращается, сумма моментов всех внешних сил относительно любой точки для него должна быть равна нулю. Рассмотрим моменты относительно точки O (при таком выборе момент силы R равен нулю):

$$N_1 b - mg\frac{a}{2} = 0$$

Второй закон Ньютона для ящика в проекциях на оси x и y дает

$$-F_{\text{тр}} + R_x = 0, \quad N_2 - Mg - R_y = 0.$$

Решая систему полученных уравнений и вспоминая, что сила трения покоя должна удовлетворять неравенству $F_{\text{тр}} \leq \mu N_2$, находим

$$mg\frac{a}{2b} \leq \mu(M+m)g.$$

Отсюда уже легко найти требование, которому должен подчиняться коэффициент трения, для того чтобы система оставалась в покое:

$$\mu \geq \frac{m}{(M+m)} \cdot \frac{a}{2b}.$$

<u>Ответ:</u> Коэффициент трения ящика о пол должен удовлетворять условию $\mu \geq ma/2(M+m)b$.

Задача 4.
Обозначим искомую скорость второго автомобиля через v_2.

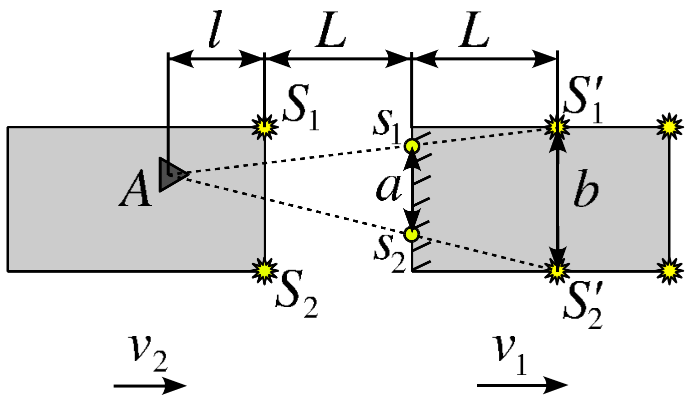

Рис. 5:

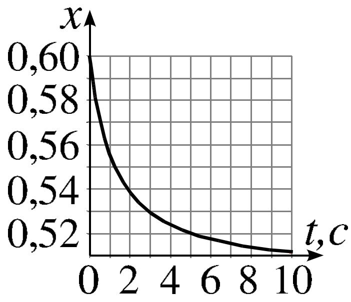

Рис. 6:

Пусть водитель Алексей располагается в точке A, удаленной от линии фар его машины на расстояние l (см. рис. 5). Как будет видно из дальнейшего, ответ не зависит от того, где именно "по ширине" автомобиля он находится. Обозначим расстояние между автомобилями в некоторый момент времени через L, ширину автомобилей или, что тоже самое, расстояние между фарами S_1 и S_2, через b.

Поскольку можно считать, что сзади автомобиль представляет собой вертикальное плоское зеркало, изображения фар второго автомобиля будут располагаться в точках S_1' и S_2', удаленных от задней поверхности второго автомобиля на такое же расстояние L. Алексей из точки A будет видеть (пунктирные линии) отражения своих фар в точках s_1 и s_2 на задней поверхности первого автомобиля. По условию, Алексей видит, что расстояние a между отражениями фар в x раз отличается от ширины машины, в которой отражаются фары. Следовательно, на графике 6 из условия представлена зависимость от времени величины $x = a/b$. Выразим эту величину через расстояния L и l.

Из рисунка 5 видно, что треугольники As_1s_2 и $AS_1'S_2'$ подобны, высоты этих треугольников, проведенные из точки A, равны $h_1 = l + L$ и $h_2 = l + 2L$ соответственно. Для подобных треугольников выполняется соотношение

$$\frac{s_1s_2}{h_1} = \frac{S_1'S_2'}{h_2} \Leftrightarrow \frac{a}{l+L} = \frac{b}{l+2L}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$x = \frac{a}{b} = \frac{l+L}{l+2L} \tag{9}$$

Из этого выражения, в частности, видно, что ответ не зависит от того, где "по ширине" автомобиля располагается водитель, так как коэффициент подобия треугольников не изменится, если посадить водителя правее или левее.

Обозначим относительную скорость автомобилей через $u = v_1 - v_2$. Тогда закон изменения расстояния между автомобилями с течением времени можно записать в виде

$$L = L_0 + ut,$$

где $L_0 = 3$ м — расстояние между автомобилями в момент времени $t = 0$. Подставляя последнее выражение в формулу (9), окончательно получаем

$$x(t) = \frac{l + L_0 + ut}{l + 2L_0 + 2ut} \tag{10}$$

Это выражение содержит две неизвестных, поэтому для того, чтобы найти скорость u (а значит, и искомую скорость второго автомобиля), необходимы два уравнения. Эти уравнения можно получить, использовав (10) для двух разных точек на графике, например, для моментов времени 0 с и 5 с:

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ с}: \quad 0,60 &= \frac{l + 3 \text{ м}}{l + 2 \cdot 3 \text{ м}} \\ t = 5 \text{ с}: \quad 0,52 &= \frac{l + 3 \text{ м} + u \cdot 5 \text{ с}}{l + 2 \cdot 3 \text{ м} + 2u \cdot 5 \text{ с}} \end{aligned} \tag{11}$$

Решая полученную систему уравнений (11), находим, что $u \approx 3$ м/с. Таким образом, скорость второго автомобиля равна

$$v_2 = v_1 - u \approx 20 \text{ м/с} - 3 \text{ м/с} = 17 \text{ м/с}.$$

Ответ: Скорость второго автомобиля равна $v_2 \approx 17$ м/с.

Задача 5.

Пока плавится лёд, температура содержимого калориметра не изменяется, а значит, сопротивление резистора остается постоянным и равным $R(T = 0^\circ\text{C}) = R_0$. При этом тепло на резисторе выделяется с постоянной мощностью $P = U^2/R_0$.

Определим, сколько времени t_1 потребуется на то, чтобы расплавить весь лёд:

$$\lambda m = \frac{U^2}{R_0} t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\lambda m R_0}{U^2}. \tag{12}$$

После того, как весь лёд растает, содержимое калориметра начнет нагреваться, сопротивление резистора будет изменяться со временем, а следовательно, мощность выделяемого тепла уже не будет постоянной.

Будем пока отсчитывать время от момента начала нагрева воды в калориметре, то есть сдвинем начало отсчета времени на величину t_1. Пусть функция $T = T(t)$ отражает зависимость температуры содержимого калориметра от времени, при этом $T(t = 0) = 0^\circ$C. Согласно условию, сопротивление резистора зависит от температуры. Поскольку температура зависит от времени по закону $T(t)$, получаем, что сопротивление меняется со временем по закону: $R(t) = R_0 + \chi T(t)$.

Рассмотрим два очень близких момента времени t и $t + \Delta t$. Обозначим изменение температуры содержимого калориметра за интервал времени Δt через ΔT. Можно считать, что на протяжении этого очень маленького интервала времени Δt, мощность тепловыделения на резисторе не успевает сильно измениться и остается постоянной и равной $P(t) = U^2/R(t)$. Поскольку теплопотерями можно пренебречь, все тепло, выделившееся на резисторе ($\Delta Q =$

$P(t)\Delta t$), идет на нагрев воды ($\Delta Q = cm\Delta T$). Учитывая, что изменение температуры ΔT приводит к изменению сопротивления резистора на величину $\Delta R = \chi \Delta T$, составим уравнение теплового баланса:

$$\frac{U^2}{R(t)}\Delta t = cm\Delta T = \frac{cm}{\chi}\Delta R. \tag{13}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\Delta t}{\Delta R} = aR, \tag{14}$$

где $a = cm/\chi U^2$.

Одинаковые уравнения в математике имеют одинаковые решения. Сделаем в уравнении (14) формальную замену $t \to x$, $R \to \tau$. Тогда оно приобретет вид:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = a\tau. \tag{15}$$

Если в последнем уравнении под τ понимать время, под x — координату, то, поскольку интервал $\Delta\tau$ по предположению мал, дробь $\Delta x/\Delta\tau$ будет иметь смысл мгновенной скорости. Тогда на уравнение (15) можно смотреть как на закон изменения мгновенной скорости некоторого тела со временем: $v(\tau) = a\tau$. В этом выражении сразу угадывается закон изменения скорости тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью, параметр a играет роль ускорения. Как меняется координата при таком движении, известно:

$$x(\tau) = x_0 + \frac{a\tau^2}{2},$$

здесь x_0 — начальная координат. Ее величину невозможно найти из уравнения (15), она определяется из начальных условий.

Возвращаясь в последнем уравнении к исходным переменным, имеем

$$t(R) = t_0 + \frac{aR^2}{2},$$

Таким образом, мы получили зависимость времени от сопротивления резистора. Обращая эту функцию, получаем зависимость сопротивления резистора от времени:

$$R(t) = \sqrt{\frac{2(t-t_0)}{a}}, \tag{16}$$

Величину параметра t_0 можно найти из того условия, что в момент времени $t = 0$ сопротивление должно быть равно $R(t=0) = R_0$ (начальное условие). Отсюда получаем

$$R(t) = \sqrt{\frac{2t}{a} + R_0^2},$$

Наконец, вспоминая связь температуры резистора и его сопротивления ($R(T) = R_0 + \chi T$), а также то, что мы сдвигали начало отсчета времени, для зависимости температуры содержимого калориметра от времени окончательно имеем:

$$\begin{gathered} T(t) = 0^{\circ}\mathrm{C}, \quad t \in [0, t_1] \\ T(t) = \frac{1}{\chi}\left(\sqrt{\frac{2\chi U^2}{cm}(t-t_1) + R_0^2} - R_0\right), \quad t \in [t_1, t_2], \end{gathered} \tag{17}$$

где t_2 — момент времени, когда температура достигает значения T_*:

$$t_2 = \frac{cm}{2\chi U^2}\left((\chi T_* + R_0)^2 - R_0^2\right) + t_1. \tag{18}$$

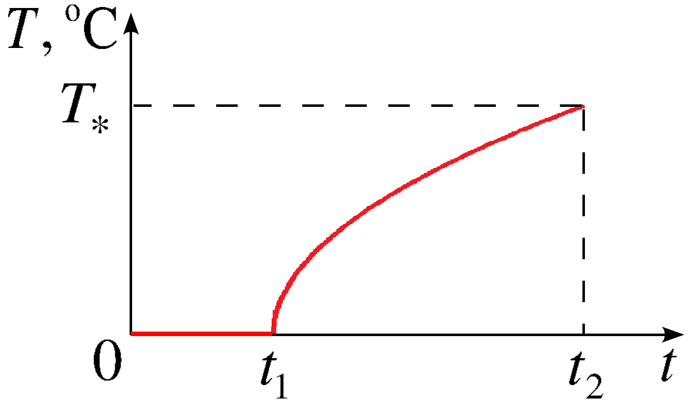

Рис. 7:

График зависимости температуры содержимого калориметра от времени представлен на рисунке 7.

Ответ: Зависимость температуры содержимого калориметра от времени дается выражением (17), где t_1 и t_2 определены в (12) и (18) соответственно. График зависимости температуры от времени представлен на рисунке 7.

Замечание: Уравнение 13 можно решить без использования аналогии с кинематикой, для этого необходима техника решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных. Участники, верно использовавшие эту технику, также получат полный балл.

Районный тур 2013. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Средняя скорость, по определению, есть отношение длины пути, пройденного телом, ко времени, за которое этот путь был пройден.

Определим, за какое время τ частица перемещается от одной ловушки до другой:

$$L = \frac{a\tau^2}{2} \Leftrightarrow \tau = \sqrt{\frac{2L}{a}}.$$

Следовательно, средняя скорость движения частицы между двумя соседними ловушками равна

$$v_{\text{ср}1} = \frac{L}{\tau} = \frac{L}{\sqrt{2L/a}} = \sqrt{\frac{La}{2}}.$$

Заметим, что, поскольку после попадания в ловушку скорость частицы каждый раз обнуляется, ее движение между любыми двумя соседними ловушками происходит все время одинаково. Если рассчитывать среднюю скорость частицы за время T, сравнимое по величине с временем ее движения между ловушками τ, то ответ, очевидно, будет зависеть от T или, что тоже самое, от того, где именно находится в данный момент частица. Ясно также, что для времен $T = n\tau$ (n — натуральное число) средняя скорость всегда будет равна $v_{\text{ср}1}$, так как в данном случае пройденный частицей путь будет равен $S = nL$, и

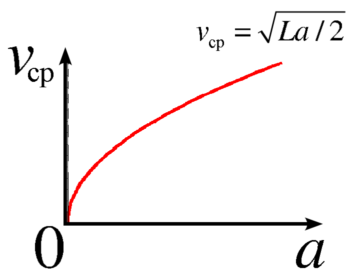

Рис. 8:

$$v_{\text{ср}n} = \frac{nL}{n\tau} = \frac{L}{\tau} = v_{\text{ср}1}.$$

За "промежуточные" времена T, когда $T \in (n\tau, (n+1)\tau)$, значение средней скорости будет отличаться от $v_{\text{ср}1}$, так как частица все же двигается неравномерно. Однако, ясно, что, чем больше отношение T/τ, тем меньше величина средней скорости частицы за время T будет отличается от $v_{\text{ср}1}$. Действительно, пусть за время T частица прошла путь S, тогда эти величины можно представить в виде

$$S = nL + s, \quad T = n\tau + t,$$

где $s < L$ и $t < \tau$. Тогда средняя скорость за время T равна

$$v_{\text{ср}T} = \frac{S}{T} = \frac{nL+s}{n\tau+t} = \frac{nL}{n\tau} \cdot \frac{1+\dfrac{s}{nL}}{1+\dfrac{t}{n\tau}} = v_{\text{ср}1} \cdot \frac{1+\dfrac{s}{L}\cdot\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{t}{\tau}\cdot\dfrac{1}{n}} \approx v_{\text{ср}1} \cdot \left(1 + \left(\frac{s}{L} - \frac{t}{\tau}\right)\cdot\frac{1}{n}\right) + \ldots \qquad (19)$$

При увеличении n последняя дробь в (19) все меньше отличается от единицы. Поэтому очевидно, что искомая средняя скорость частицы за время много большее времени ее движения между ловушками попросту совпадает со средней скоростью движения частицы от ловушки до ловушки $v_{\text{ср}1}$.

Остается только нарисовать график зависимости средней скорости от величины расстояния L. Соответствующий график представлен на рисунке 8.

<u>Ответ:</u> Средняя скорость равна $\sqrt{La/2}$. График представлен на рисунке 8

Задача 2.

В данной задаче представляет интерес лишь подсчёт силы, оказываемой непосредственно водой на дно и стенки без учёта вклада атмосферного давления.

Сила давления на дно сосуда находится из соображений вертикального равновесия системы. Назовём силу давления воды на дно $\vec{F}_{\text{дно}}$. Тогда сила реакции опоры, действующая со стороны дна на воду, противоположна силе давления и равна $-\vec{F}_{\text{дно}}$. Запишем второй закон Ньютона для воды в проекции на вертикальную ось, направленную вниз. Поскольку в данной задаче параллельно этой оси действуют только сила тяжести и сила реакции опоры, то

$$mg + (-F_{\text{дно}}) = 0, \tag{20}$$

где $m = \rho lbh$ — масса воды, а ось направлена вниз. Другие силы, действующие на воду — силы реакции со стороны стенок, — направлены горизонтально как в состоянии покоя, так и в процессе ускорения. Поэтому уравнение (20) верно и во время движения, и

$$F_{\text{дно}} = \rho blhg \tag{21}$$

есть ответ на первый вопрос задачи.

Для нахождения силы давления воды на стенку AB перейдём в неинерциальную систему отсчёта (НИСО), связанную с аквариумом, т.е. движущуюся с ускорением $\vec{a}$ вправо. В такой НИСО на любое тело массы m действует сила $-m\vec{a}$. Поэтому можно говорить, что на все массивные тела в этой НИСО находятся в поле «модифицированной силы тяжести» с «модифицированным ускорением свободного падения» $\vec{g'} = -\vec{a} + \vec{g}$.

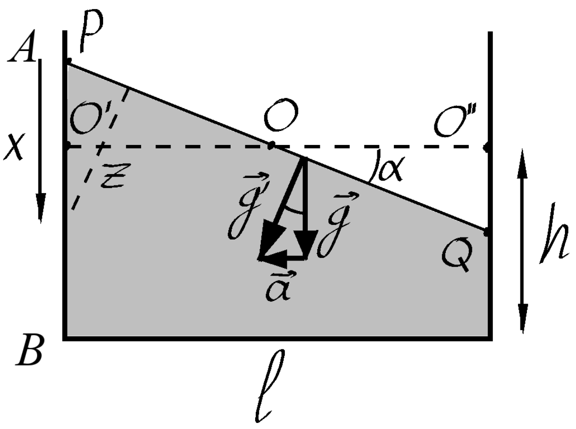

Рис. 9:

Как известно, в состоянии покоя поверхность воды перпендикулярна ускорению свободного падения. В нашей НИСО в качестве такового следует рассматривать $\vec{g'}$, так что поверхность воды будет образовывать угол α с горизонталью, где $tg\,\alpha = a/g$ (см. Рис. 9). В дальнейшем нам потребуется использовать высоту воды при левой стенке AB. При отклонении уровня воды от $O'O''$ до PQ ее объем не меняется, поэтому треугольники POO' и O"OQ будут равны. Тогда уровень воды при левой стенке AB будет равен

$$|PB| = h + \frac{l}{2} tg\,\alpha = h + \frac{la}{2g}, \tag{22}$$

Давление воды на одном и том же расстоянии от поверхности будет одинаково и равно $\rho g' z$. Найдём давление вблизи левой стенки на глубине x (см. Рис. 9). Расстояние до поверхности воды будет $z = x\cos\alpha$, при этом $\cos\alpha = g/g'$. Так что

$$p(x) = \rho g' z = \rho g' x \cos\alpha = \rho g x. \tag{23}$$

Следовательно, давление на глубине x будет таким же, как если бы вода покоилась в наклонном положении в инерциальной системе отсчета. Таким образом, задача сводится к подсчёту силы давления водяного столба высотой $|PB|$ на вертикальную стенку ширины b в обычном поле тяжести. Давление с глубиной меняется линейно, поэтому среднее значение давления на стенку равно давлению на половине высоты водяного столба ($\rho gh|PB|/2$). Тогда сила давления равна

$$F_{\text{бок}} = \left(\rho g \frac{|PB|}{2}\right) \cdot (|PB| b) = \frac{1}{2} \rho g \left(h + \frac{la}{2g}\right)^2 b. \tag{24}$$

Однако данная формула справедлива лишь для случая, когда ускорение $\vec{a}$ достаточно мало для того, чтобы вода касалась правой стенки CD аквариума. Если же ускорение будет слишком сильным, то вода отойдёт от правой стенки (см. Рис. 10). Тогда сила давления на левую стенку AB будет равна горизонтальной компоненте «модифицированной силы тяжести», т.е.

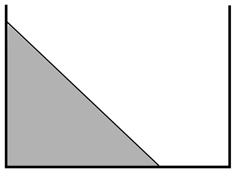

Рис. 10:

$$F_{\text{бок}} = \rho blha. \tag{25}$$

Условием реализации такого случая является

$$tg\,\alpha = \frac{a}{g} \geq \frac{2h}{l},$$

т.е.

$$a \geq 2g\frac{h}{l}. \tag{26}$$

Объединяя (24), (25) и (26), можно записать

$$F_{\text{бок}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho g\left(h + \dfrac{la}{2g}\right)^2 b, & a < 2g\dfrac{h}{l}; \\ \rho blha, & a \geq 2g\dfrac{h}{l}. \end{cases}, \tag{27}$$

что является ответом на второй вопрос.

Ответ: За вычетом атмосферного давления, давление воды на дно сосуда равно $\rho blhg$. Давление на стенку AB дается выражением (27).

Задача 3.

Рассмотрим условия того, что система находится в покое. На рисунке 11 изображены все силы, приложенные к ящику (зеленые стрелки) и к стержню OA (синие стрелки). Обратите внимание, что сила реакции R в шарнире в общем случае направлена не вдоль стержня.

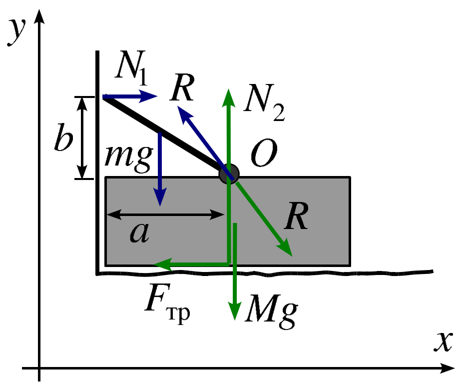

Рис. 11:

Введем оси, как показано на рисунке. Обозначим величины проекций силы R на оси x и y через R_x и R_y соответственно.

Выпишем второй закон Ньютона для стрежня в проекциях на оси x и y:

$$N_1 - R_x = 0, \quad R_y - mg = 0.$$

Поскольку стержень не вращается, сумма моментов всех внешних сил относительно любой точки для него должна быть равна нулю. Рассмотрим моменты относительно точки O (при таком выборе момент силы R равен нулю):

$$N_1 b - mg\frac{a}{2} = 0$$

Второй закон Ньютона для ящика в проекциях на оси x и y дает

$$-F_{\text{тр}} + R_x = 0, \quad N_2 - Mg - R_y = 0.$$

Решая систему полученных уравнений и вспоминая, что сила трения покоя должна удовлетворять неравенству $F_{\text{тр}} \le \mu N_2$, находим

$$mg\frac{a}{2b} \le \mu(M+m)g.$$

Отсюда уже легко найти требование на расстояние a между шарниром и стенкой, при выполнении которого система будет оставаться в покое:

$$a \le b\frac{2\mu(M+m)}{m}.$$

Ответ: Расстояние a от шарнира до ящика должно удовлетворять условию $a \le 2\mu(1+M/m)b$.

Задача 4.

Обозначим искомую скорость второго автомобиля через v_2.

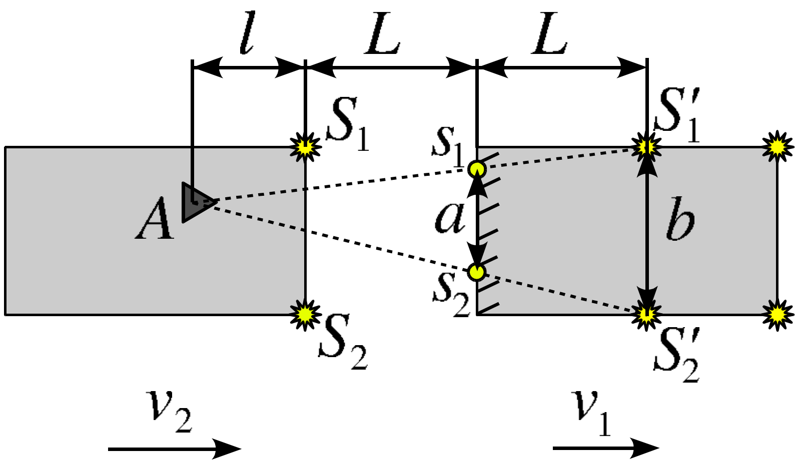

Рис. 12:

Пусть водитель Алексей располагается в точке A, удаленной от линии фар его машины на расстояние l (см. рис. 12). Как будет видно из дальнейшего, ответ не зависит от того, где именно “по ширине” автомобиля он находится. Обозначим расстояние между автомобилями в некоторый момент времени через L, ширину автомобилей или, что тоже самое, расстояние между фарами S_1 и S_2, через b.

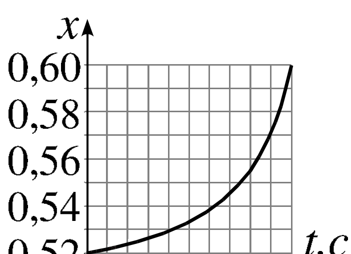

Рис. 13:

Поскольку можно считать, что сзади автомобиль представляет собой вертикальное плоское зеркало, изображения фар второго автомобиля будут располагаться в точках S_1' и S_2', удаленных от задней поверхности второго автомобиля на такое же расстояние L. Алексей из точки A будет видеть (пунктирные линии) отражения своих фар в точках s_1 и s_2 на задней поверхности первого автомобиля. По условию, Алексей видит, что расстояние a между отражениями фар в x раз отличается от ширины машины, в которой отражаются фары. Следовательно, на графике 13 из условия представлена зависимость от времени величины $x = a/b$. Выразим эту величину через расстояния L и l.

Из рисунка 12 видно, что треугольники As_1s_2 и $AS_1'S_2'$ подобны, высоты этих треугольников, проведенные из точки A, равны $h_1 = l + L$ и $h_2 = l + 2L$ соответственно. Для подобных треугольников выполняется соотношение

$$\frac{s_1s_2}{h_1} = \frac{S_1'S_2'}{h_2} \Leftrightarrow \frac{a}{l+L} = \frac{b}{l+2L}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$x = \frac{a}{b} = \frac{l+L}{l+2L} \tag{28}$$

Из этого выражения, в частности, видно, что ответ не зависит от того, где "по ширине" автомобиля располагается водитель, так как коэффициент подобия треугольников не изменится, если посадить водителя правее или левее.

Обозначим относительную скорость автомобилей через $u = v_1 - v_2$. Тогда закон изменения расстояния между автомобилями с течением времени можно записать в виде

$$L = L_0 + ut,$$

где $L_0 = 24$ м — расстояние между автомобилями в момент времени $t = 0$. Подставляя последнее выражение в формулу (28), окончательно получаем

$$x(t) = \frac{l + L_0 + ut}{l + 2L_0 + 2ut} \tag{29}$$

Это выражение содержит две неизвестных, поэтому для того, чтобы найти скорость u (а значит, и искомую скорость второго автомобиля), необходимы два уравнения. Эти уравнения можно получить, использовав (29) для двух разных точек на графике, например, для моментов времени 0 с и 10 с:

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ с}: \quad 0,52 &= \frac{l + 24 \text{ м}}{l + 2 \cdot 24 \text{ м}} \\ t = 10 \text{ с}: \quad 0,60 &= \frac{l + 24 \text{ м} + u \cdot 10 \text{ с}}{l + 2 \cdot 24\text{м} + 2u \cdot 10 \text{ с}} \end{aligned} \tag{30}$$

Решая полученную систему уравнений (30), находим, что $u \approx -2$ м/с. Отрицательный знак означает, что машины сближаются. Таким образом, скорость второго автомобиля равна

$$v_2 = v_1 - u \approx 25 \text{ м/с} - (-2 \text{ м/с}) = 27 \text{ м/с}.$$

Ответ: Скорость второго автомобиля равна $v_2 \approx 27$ м/с.

Задача 5.

Пока плавится лёд, температура содержимого калориметра не изменяется, а значит, сопротивление резистора остается постоянным и равным $R(T = 0^\circ\text{C}) = R_0$. При этом тепло на резисторе выделяется с постоянной мощностью $P = U^2/R_0$.

Определим, сколько времени t_1 потребуется на то, чтобы расплавить весь лёд:

$$\lambda m = \frac{U^2}{R_0} t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\lambda m R_0}{U^2}. \tag{31}$$

После того, как весь лёд растает, содержимое калориметра начнет нагреваться, сопротивление резистора будет изменяться со временем, а следовательно, мощность выделяемого тепла уже не будет постоянной.

Будем пока отсчитывать время от момента начала нагрева воды в калориметре, то есть сдвинем начало отсчета времени на величину t_1. Пусть функция $T = T(t)$ отражает зависимость температуры содержимого калориметра от времени, при этом $T(t = 0) = 0^\circ$C. Согласно условию, сопротивление резистора определяется температурой. Поскольку температура зависит от времени, получаем, что искомая зависимость сопротивления резистора от времени имеет вид: $R(t) = R_0(1 + \gamma T(t))$.

Рассмотрим два очень близких момента времени t и $t + \Delta t$. Обозначим изменение температуры содержимого калориметра за интервал времени Δt через ΔT. Можно считать, что на протяжении этого очень маленького интервала времени Δt, мощность тепловыделения на резисторе не успевает сильно измениться и остается постоянной и равной $P(t) = U^2/R(t)$. Поскольку теплопотерями можно пренебречь, все тепло, выделившееся на резисторе ($\Delta Q = P(t)\Delta t$), идет на нагрев воды ($\Delta Q = cm\Delta T$). Учитывая, что изменение температуры ΔT приводит к изменению сопротивления резистора на величину $\Delta R = \gamma R_0 \Delta T$, составим уравнение теплового баланса:

$$\frac{U^2}{R(t)}\Delta t = cm\Delta T = \frac{cm}{\gamma R_0}\Delta R. \tag{32}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{\Delta t}{\Delta R} = aR, \tag{33}$$

где $a = cm/\gamma R_0 U^2$.

Одинаковые уравнения в математике имеют одинаковые решения. Сделаем в уравнении (33) формальную замену $t \to x$, $R \to \tau$. Тогда оно приобретет вид:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = a\tau. \tag{34}$$

Если в последнем уравнении под τ понимать время, под x — координату, то, поскольку интервал $\Delta\tau$ по предположению мал, дробь $\Delta x/\Delta\tau$ будет иметь смысл мгновенной скорости. Тогда на уравнение (34) можно смотреть как на закон изменения мгновенной скорости некоторого тела со временем: $v(\tau) = a\tau$. В этом выражении сразу угадывается закон изменения скорости тела при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью, параметр a играет роль ускорения. Как меняется координата при таком движении, известно:

$$x(\tau) = x_0 + \frac{a\tau^2}{2},$$

здесь x_0 — начальная координат. Ее величину невозможно найти из уравнения (34), она определяется из начальных условий.

Возвращаясь в последнем уравнении к исходным переменным, имеем

$$t(R) = t_0 + \frac{aR^2}{2},$$

Таким образом, мы получили зависимость времени от сопротивления резистора. Обращая эту функцию, получаем зависимость сопротивления резистора от времени:

$$R(t) = \sqrt{\frac{2(t - t_0)}{a}}, \tag{35}$$

Величину параметра t_0 можно найти из того условия, что в момент времени $t = 0$ сопротивление должно быть равно $R(t = 0) = R_0$ (начальное условие). Отсюда получаем

$$R(t) = \sqrt{\frac{2t}{a} + R_0^2},$$

Наконец, вспоминая, что мы сдвигали начало отсчета времени, для зависимости сопротивления резистора от времени окончательно имеем:

$$\begin{gathered} R(t) = R_0, \quad t \in [0, t_1] \\ R(t) = \sqrt{\frac{2\gamma R_0 U^2}{cm}(t - t_1) + R_0^2}, \quad t \in [t_1, t_2], \end{gathered} \tag{36}$$

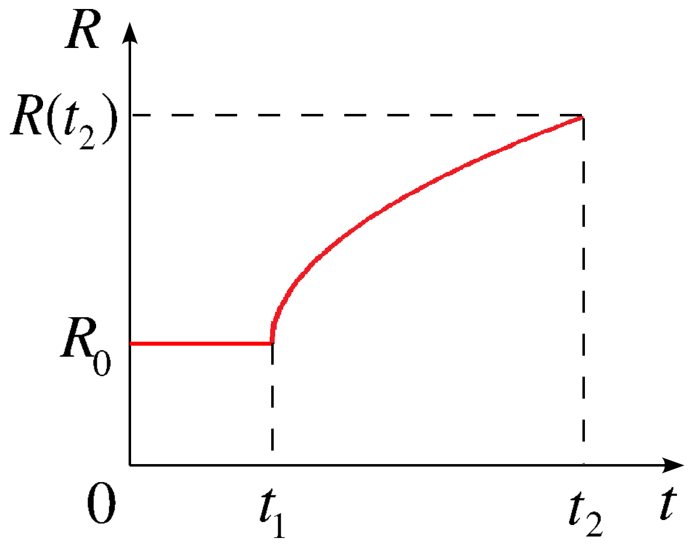

Рис. 14:

где t_2 — момент времени, когда температура достигает значения T_*. Для того чтобы найти t_2 еще раз необходимо использовать связь температуры реостата и его сопротивления ($R(T) = R_0(1+\gamma T)$):

$$R_0(1+\gamma T_*) = \sqrt{\frac{2\gamma R_0 U^2}{cm}(t_2 - t_1) + R_0^2} \Leftrightarrow t_2 = \frac{cmR_0}{2\gamma U^2}\left((1+\gamma T_*)^2 - 1\right) + t_1. \tag{37}$$

График зависимости сопротивления реостата от времени представлен на рисунке 14.

Ответ: Зависимость сопротивления реостата от времени дается выражением (36), где t_1 и t_2 определены в (31) и (37) соответственно. График зависимости температуры от времени представлен на рисунке 14.

Замечание: Уравнение 32 можно решить без использования аналогии с кинематикой, для этого необходима техника решения дифференциальных уравнений методом разделения переменных. Участники, верно использовавшие эту технику, также получат полный балл.