10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Каждому набору $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (где $x_i \in \{0,1\}$) функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ставит в соответствие либо 0, либо 1. Условимся значения 0 и 1 называть *противоположными*. Известно, что 1) если в произвольном наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменить значение x_1 или x_5 на противоположное, то и соответствующее значение функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменится на противоположное и 2) если в произвольном наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменить *одновременно* значения x_2, x_3 и x_4 на противоположные, то значение функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменится на противоположное. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ получена по правилу:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0,\ x_{k+5} = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}),\ k = 1,2, \ldots$$

Найдите x_{12}, если известны первые 11 членов этой последовательности: 00000100111. Ответ обоснуйте.

2. Для зашифрования слова из пяти букв каждая его буква заменяется на число согласно таблице. Полученный набор чисел $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ затем преобразуется в набор $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ по следующему правилу. Сначала вычисляют вспомогательные числа $\overline{y_0}, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}, \overline{y_4}$ по формулам

$$\overline{y_0} = 2^0 \cdot x_0 + 2^4 \cdot x_1 + 2^3 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_3 + 2^1 \cdot x_4,$$
$$\overline{y_k} = (2^k \cdot x_0 + 2^{k-1} \cdot x_1 + \cdots + 2^0 \cdot x_k) + (2^4 \cdot x_{k+1} + 2^3 \cdot x_{k+2} + \cdots + 2^{k+1} \cdot x_4),\ k = 1,2,3.$$
$$\overline{y_4} = 2^4 \cdot x_0 + 2^3 \cdot x_1 + 2^2 \cdot x_2 + 2^1 \cdot x_3 + 2^0 \cdot x_4.$$

А затем полагают y_k равным остатку от деления числа $\overline{y_k}$ на 32. Расшифруйте исходное слово, если $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (7,22,25,5,27)$.

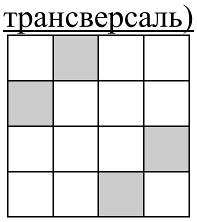
А	Б	В	Г	Д	Е Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

3. В каждую клетку доски 4×4 Аня положила по нескольку зерен и передала доску Боре (см. рис.). *Трансверсалью* доски называется набор из 4 клеток, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах (см. примеры). Боря за один ход может снять одинаковое количество зерен с каждой клетки какой-либо одной трансверсали. За какое минимальное число ходов Боря может снять все зерна с доски?

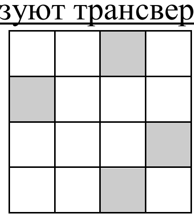
<u>Доска с зернами</u>

1	5	5	4
2	4	4	5
5	1	4	5
7	5	2	1

<u>Пример (серые клетки образуют трансверсаль)</u>

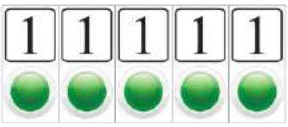


<u>Пример (серые клетки **не** образуют трансверсаль)</u>



4. Для зашифрования слова каждая его буква заменяется на двухзначное число согласно таблице. Затем выбираются секретные ключи K_1, K_2 – натуральные числа от 1 до 9. С их помощью каждое двузначное число преобразуется так. Пусть A – первая цифра двузначного числа, B – его вторая цифра. Двухзначное число (A, B) преобразуется в число (A_1, B_1) по формулам $A_1 = B$, $B_1 = r_{10}(A + K_1 \cdot B)$. Здесь $r_{10}(x)$ – остаток от деления числа x на 10. Затем число (A_1, B_1) преобразуется в число (A_2, B_2) по аналогичным формулам, но только вместо ключа K_1 используется ключ K_2. Далее каждое исходное двузначное число (A, B) было заменено числом (A_2, B_2). В результате получилось вот что: **49 97 32 20 52 77 20 37 85 72**. Восстановите исходное слово.

5. При входе в личный кабинет на терминале требуется ввести пятизначный пароль из 0 и 1. Для этого на терминале имеются 5 кнопок и 5 окошек. При нажатии на кнопку в ей соответствующем окошке текущий символ заменяется на противоположный (то есть если в окошке сейчас горит цифра 1, то после нажатия на кнопку там будет 0, и наоборот). Сейчас во всех окошках выставлена 1. Какое наименьшее количество нажатий кнопок потребуется, чтобы перебрать все возможные варианты пароля?



6. Про числа A и B известно следующее: 1) $A = p_1^2 \cdot p_2^2$, где p_1 и p_2 – различные простые числа, 2) $B = q^2, q \in \mathbb{N}$, 3) $B - A = 36^2$. Найдите все такие A и B.