РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Порядок следования планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон. Поскольку фраза помогает расположение планет запомнить, логично предположить, что первая буква в каждом слове – это первая буква в названии планеты. То есть М заменили на Ч, В на П и т.д. Из соображений читаемости легко восстанавливается ответ.

Ответ: МОЖНО ВЫЛЕТЕТЬ ЗА МАРС, ЮВЕЛИРНО СВЕРНУВ У НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ.

Задача 2

Число t у Марии равно $31\cdot(4-1)+(28-1)=89,$ а у Александра $31\cdot(1-1)+(31-1)=30.$ Пусть $n=373$, тогда по условию $r_n(\alpha^{31})=89,$ $r_n(\alpha^{12})=30$ (где $r_n(a)$ - остаток от деления числа a на n).

Требуется найти остаток от деления α^{189} на 373. Для этого найдем натуральные u и v такие, что $\alpha^{189}=\left(\alpha^{31}\right)^u\left(\alpha^{12}\right)^v$, то есть $31u+12v=189.$ Тогда

$$v=\frac{189-31u}{12}=15-3u+\frac{9+5u}{12}.$$

Чтобы числитель последней дроби делился на 12, следует положить $u=3$, тогда $v=8$ и (см. приложение):

$r_n(\alpha^{189})=r_n((\alpha^{31})^3\cdot(\alpha^{12})^8)=r_n(\alpha^{31})^3\cdot r_n(\alpha^{12})^8=r_n(89)^3\cdot r_n(30)^8=282.$

Итак, число t у Павла равно 282, а т.к. $282=31\cdot(10-1)+(4-1)$, то получаем, что Павел родился 4-го октября.

Ответ: 4-ое октября.

Задача 3

Для любых трех натуральных чисел m,n и a справедливо равенство $\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^{(m,n)}-1.$ Здесь (x,y) – наибольший общий делитель чисел x и y. В условии задачи показатели m и n взаимно просты, поэтому число $a^{(m,n)}-1$ равняется числу $a-1,$ то есть длине искомого отрезку. Его можно получить по алгоритму Евклида: меньший отрезок откладывают циркулем на большем столько раз, сколько возможно; оставшуюся часть большего отрезка (принимаемую за «остаток от деления») откладывают на меньшем отрезке и т.д.

Покажем как можно решить задачу непосредственно (а по сути, перевывести упомянутое равенство в частном случае). Даны два отрезка $x=a^{2015}-1$ и $y=a^{2018}-1,$ где $a=2016.$ Будем, пока возможно, откладывать меньший отрезок x на большем y. То есть делим y на x с остатком: $a^{2018}-1=a^3\left(a^{2015}-1\right)+a^3-1.$ Теперь делим меньший отрезок x на остаток: $a^{2015}-1=a^2\left(a^{2013}-1\right)+a^2-1.$ Поскольку 2013 делится на 3, число $a^{2013}-1$ делится нацело на число $a^3-1,$ при этом a^2-1 – остаток от деления числа x на $a^3-1.$ И, наконец, $a^3-1=a\left(a^2-1\right)+a-1.$ Тем самым доказано, что наибольшей общей мерой данных в условии отрезков будет отрезок длиной $a-1.$

Задача 4

Заметим, что “избавиться” от действия второго блока легко: достаточно от чисел зашифрованного сообщения взять остаток от деления на 33:

30 5 18 6 16 18 10 9 5 6 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 6 4 5 20 0 17 17 28 16 6 17 18 6 17 18 24 29 31 6 11 8 9 4 29 6 1 4 9 6 14 18 25 14 12 6 4 9 20 28

По регулярности расположения чисел и исходя из правила построения ключа обозначать знак пробела может только число 6 (которое встречается чаще всего):

30 5 18 - 16 18 10 9 5 - 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 - 4 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 29 31 - 11 8 9 4 29 - 1 4 9 - 14 18 25 14 12 - 4 9 20 28

Рассмотрим возможные места расположения слова ЗДЕСЬ, в тексте всего имеется 5 вариантов слов из 5-ти букв:

16 18 10 9 5
4 5 20 0 17
17 18 24 29 31
11 8 9 4 29
14 18 25 14 12

Поскольку разные буквы шифровались разными числами, последний вариант расположения слова ЗДЕСЬ не подходит из-за дважды встречающегося числа 14. Учитывая алгоритм построения ключа, отбросим первый, второй и третий варианты, поскольку шестая буква алфавита Е при найденном расположении пробела не может оказаться на 18, 20 и 24 месте ключа.

Тогда единственным вариантом будет соответствие:

11 8 9 4 29 = ЗДЕСЬ.

Произведем замену:

30 5 18 - 16 18 10 Е 5 - 19 18 14 0 З 0 5 Ь С 32 - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 Ь 31 - З Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

Далее, поскольку Ь зашифрован числом 29, можно определить, что 30 31 32 = Э Ю Я, получаем:

Э 5 18 - 16 18 10 Е 5 - 19 18 14 0 З 0 5 Ь С Я - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 Ь Ю - З Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

По слову 1 С Е нетрудно догадаться, что 1 = В, слово Э 5 18 похоже на ЭТО и тогда 17 18 = НО, получаем:

Э Т О - 16 О 10 Е Т - 19 О 14 0 З 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н 17 28 16 - Н О - Н О 24 Ь Ю - З Д Е С Ь - В С Е - 14 О 25 14 12 - С Е 20 28

Видим, что 24 = Ч, тогда 25 26 27 28 = Ш Щ Ъ Ы и 10 = Ж и располагаем почти читаемым текстом:

Э Т О - 16 О Ж Е Т - 19 О 14 0 З 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н Н Ы 16 - Н О - Н О Ч Ь Ю - З Д Е С Ь - В С Е - 14 О Ш 14 12 - С Е 20 Ы,

который нетрудно восстановить по смыслу и с учетом правила зашифрования, описанного в задаче.

Ответ: ЭТО МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ СТРАННЫМ НО НОЧЬЮ ЗДЕСЬ ВСЕ КОШКИ СЕРЫ.

Задача 5

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, первые пять цифр можно выбрать $2\cdot 10^4$ способами. Следующие четыре цифры $(a_6,\ldots,a_9)$ выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_{10}. Таким образом, количество наборов из 10-и цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2\cdot 10^4\cdot 10^4 = 2\cdot 10^8$. По аналогии, количество наборов $(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$, сумма цифр у которых делится на 10, равно 10^9. Далее, пусть $A=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$ – один из таких наборов, т.е. сумма его цифр $M = a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{20}$ делится на 10. Используя цифры набора *A*, построим набор $B=((9-a_{11}),(9-a_{12}),\ldots,(9-a_{20}))$. Сумма его цифр также делится на 10 и равна $90-M$. Но тогда суммы цифр в наборах A и B имеют разные остатки от деления на 20 (у одной из них он 0, у другой – 10). Рассмотрим теперь какой-либо набор $(a_1,\ldots,a_{10})$, удовлетворяющий условиям (1) и (2). Дополним его наборами *A* и *B*. Тогда сумма всех цифр ровно у одного из двух наборов $(a_1,\ldots,a_{10},A)$ и $(a_1,\ldots,a_{10},B)$ будет делиться нацело на 20. Значит, одному набору $(a_1,\ldots,a_{10})$ "подойдет" ровно половина из 10^9 наборов $(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$. Следовательно, общее количество наборов, удовлетворяющих условиям задачи, равно $2\cdot 10^8\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^9=10^{17}$.

Ответ: 10^{17}.

Задача 6

Если $s=u^3$, то по условию $r_n((s\cdot c)^d)=r_n(u\cdot m)$. При $s=1728=12^3$ ошибки не было, поэтому $r_n(12\cdot m)$ – четырехзначное число, начинающееся с 1, то есть

$$1000\le r_n(12\cdot m)=12\cdot m-t\cdot n<2000,$$

$$\frac{1000+t\cdot n}{12}\le m<\frac{2000+t\cdot n}{12},$$

t – натуральное. С учетом того, что

$$1000\le m<2000 \qquad (1)$$

нетрудно заметить, что $t=1$ и получаем следующее ограничение:

$$1767\le m\le 1850. \qquad (2)$$

При $s=89^3$ ошибки также не было, поэтому

$$1000\le r_n(89\cdot m)=89\cdot m-t'\cdot n<2000,$$

$$\frac{1000+t'\cdot n}{89}\le m<\frac{2000+t'\cdot n}{89}.$$

Нетрудно заметить, что $t'=8$ – в этом можно убедиться непосредственной проверкой, но для сокращения времени на вычисления можно при различных t' получить только соответствующие оценки, противоречащие (1) или (2):

- при $t'=10$ имеем $\frac{1000+10\cdot n}{89}>\frac{10\cdot 20203}{100}>2000$, что противоречит (1);
- при $t'=9$ имеем $\frac{1000+9\cdot n}{89}>\frac{9\cdot 20203}{90}>2000$, что противоречит (1).
- при $t'=7$ имеем $\frac{2000+7\cdot 20203}{89}<\frac{2000+7\cdot 20205}{85}=25+\frac{7}{17}\cdot 4021<1700$, что противоречит (2).

В итоге получаем, что $t'=8$ и

$$1828\le m\le 1838. \qquad (3)$$

Предположим теперь, что и при $s=100^3$ ошибки не было. Тогда

$$a=\frac{1000+t''\cdot n}{100}\le m<\frac{2000+t''\cdot n}{100}=b. \qquad (4)$$

Полуинтервал $[a,b)$ должен иметь непустое пересечение с отрезком, определяемым неравенством (3). Следовательно,

$$\begin{cases} a\le 1838 \\ b>1828 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t''\cdot n\le 182800 \\ t''\cdot n>180800 \end{cases} \Leftrightarrow t''\cdot n=181827.$$

Подставляя найденное значение $t''\cdot n$ в (4), имеем

$$1829\le m\le 1838. \qquad (5)$$

Но на самом деле при $s=100^3$ ошибка была, значит m неравенству (5) не удовлетворяет, но удовлетворяет неравенству (3), следовательно $m=1828$.

Ответ: 1828.