XXV

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2016

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Пусть $r_{10}(a)$ – остаток от деления a на 10, тогда количество корректных номеров есть число решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_{10}(A) = 0, \\ r_{10}(B) = 0, \\ r_{10}(C) = 0. \end{cases}$$

Для удобства расположим слагаемые (из вида A, B и C) в таблице:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Если первые 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

	x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{15}	x_{16}
$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}				x_{14}		x_{16}

Но тогда первая строка есть остаток от деления суммы третьей и второй на 10. Вычитая из первой строки вторую и третью, а затем из второй строки третью, получим, что исходная система равносильна системе (см. приложение)

$$\begin{cases} r_{10}(x_{15}) = r_{10}(4x_5 - x_6 - x_7 + x_8 - 4x_9 + x_{10} - x_{11} - x_{12} - x_{13} + x_{14}), \\ r_{10}(x_{16}) = r_{10}(-7x_5 - x_8 - 3x_9 - x_{10} - x_{14}). \end{cases}$$

Количество решений есть количество способов поставить всеми возможными способами на места переменных $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ числа 0,1,2,…,9. Таким образом, число корректных номеров равно 10^{10}.

Если же последние 4 цифры 0, 0, 0, 0, то таблица примет вид:

x_1		x_3	x_4		x_6	x_7	x_8		x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1		x_3	x_4	$3x_5$	x_6	x_7		$7x_9$		x_{11}	x_{12}
x_1	x_2		x_4	$7x_5$			x_8	$3x_9$	x_{10}		

В отличие от первого случая, переменные x_1, x_2, x_3 будут линейно выражаться через $x_4, x_6, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. И тогда получим, что число решений системы равно 10^9.

Ответ: в первом случае корректных номеров больше, чем во втором на $10^{10} - 10^9$.

Задача 2

Натуральное число делится на 2015 нацело в том и только том случае, когда оно делится на 5 и на 403. Рассмотрим теперь все числа, десятичная запись которых имеет вид 12351235…1235:

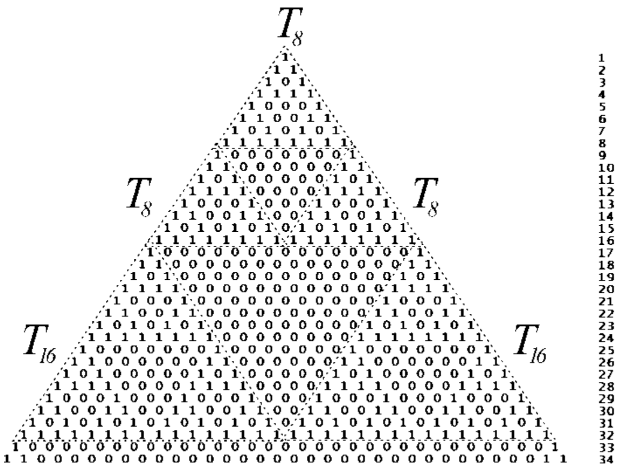
$$x_1 = 1235,\ x_2 = 12351235, \dots \qquad (1)$$

Среди них найдутся два числа, x_m и x_n $(m > n)$, которые имеют одинаковые остатки при делении на 403. Действительно, чисел вида (1) бесконечно много, а различных остатков от деления на 403 всего 403 штуки.

Тогда их разность $x_m - x_n$ делится на 403 (см. приложение). Теперь отбросим все нули на конце десятичной записи этой разности. В результате получим число вида (1). И это число, очевидно, по-прежнему делится на 403. Оно делится также и на 5, так как на 5 оканчивается, а значит, делится на 2015.

Задача 3

Будем заменять в треугольнике нечетные числа единицами, а четные нулями. При этом каждое число внутри по-прежнему остается равным сумме стоящих над ним чисел, если принять, что 0+0=1+1=0, 1+0=0+1=1. Рассмотрим структуру треугольника подробнее. Треугольник, сформированный первыми восемью строками, обозначим T_8. В строке 9 всего две единицы (по бокам), остальные – нули. С этой строки и вниз далее идет формирование двух треугольников T_8, которые "встречаются друг с другом" в строке 16. Начиная со строки 17 и ниже, образовываются два треугольника T_{16}, которые, в свою очередь, "встречаются" в строке 32. Со строки 33 и ниже формируются два треугольника T_{32} и т.д. Таким образом, строки, чей номер представляет собой степень двойки, состоят только из единиц. Поэтому в строке 1024 четных чисел нет.



Обратимся теперь к строке 1050. Уже понятно, что, после строки 1024, идет формирование "с нуля" двух одинаковых треугольников. Строки с номером 26 в этих новых треугольниках как раз и содержатся в строке 1050 исходного (большого) треугольника, т.к. 1050=1024+16. Значит единиц в строке 1050 вдвое больше, чем единиц в строке с номером 26. Количество же 1 в строке 26 можно подсчитать непосредственно, или, рассуждая аналогично, заметить, что их вдвое больше, чем в строке 10. То есть всего в строке 26 восемь 1. Значит в строке 1050 их 16. Остальные 1034 – нули.

Ответ: а) 0, б) 1034.

Задача 4

Для решения поставленной задачи достаточно доказать, что на любой прямой, проходящей через $(0,0)$ и точку вида $(m+2n, 3m-n)$, $m,n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ - множество целых чисел), лежит сторона некоторого квадрата, все вершины которого принадлежат указанному множеству.

Известно, что перпендикулярными к вектору (a,b) являются все вектора вида $k(-b,a), k \in R$ и только они. Применительно к нашей задаче, требуется проверить, что для каждого вектора $(m_1+2n_1, 3m_1-n_1)$, $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ существует перпендикуляр вида $(m_2+2n_2, 3m_2-n_2)$, $m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$. Другими словами надо решить относительно $k, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ уравнение

$$k(n_1-3m_1, m_1+2n_1) = (m_2+2n_2, 3m_2-n_2).$$

Перепишем полученное уравнение в виде системы

$$\begin{cases} k(n_1-3m_1) = m_2+2n_2, \\ k(m_1+2n_1) = 3m_2-n_2, \end{cases}$$

которую несложно преобразовать в эквивалентную систему

$$\begin{cases} m_2+2n_2=k(n_1-3m_1), \\ -7n_2=k((m_1+2n_1)-3(n_1-3m_1)), \end{cases}$$

разрешимость которой очевидна – последовательно выбираем подходящие целые числа k, n_2 и m_2.

Таким образом, для всякого вектора $(m_1+2n_1, 3m_1-n_1)$, $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$ существует перпендикулярный ему вектор $k(n_1-3m_1, m_1+2n_1)$ вида $(m_2+2n_2, 3m_2-n_2)$. Нетрудно понять, что вектора $k(m_1+2n_1, 3m_1-n_1)$ и $k(n_1-3m_1, m_1+2n_1)$ являются сторонами искомого квадрата.

Будем искать квадрат с минимальной площадью. Без ограничения общности можно считать, что вершина A квадрата совпадает с началом координат (0,0). Пусть вершины B и C имеют координаты $B\left(m_1+2n_1, 3m_1-n_1\right), C\left(m_2+2n_2, 3m_2-n_2\right)$. Координаты четвертой вершины квадрата D совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{AD}$, которые находятся из очевидного соотношения

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\left(m_1+m_2+2(n_1+n_2), 3(m_1+m_2)-(n_1+n_2)\right).$$

То есть точка D, разумеется, принадлежит нашему множеству. Данный четырехугольник является квадратом в том и только том случае, когда

$$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \text{ и } \left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(m_1+2n_1\right)\left(m_2+2n_2\right)+\left(3m_1-n_1\right)\left(3m_2-n_2\right)=0, \\ \left(m_1+2n_1\right)^2+\left(3m_1-n_1\right)^2=\left(m_2+2n_2\right)^2+\left(3m_2-n_2\right)^2. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим

$$m_2=\frac{m_1}{7}-\frac{5n_1}{7}, \quad n_2=\frac{10m_1}{7}-\frac{n_1}{7}. \qquad (*)$$

Имеется, конечно же, еще одно решение, поскольку точку C можно отразить симметрично относительно прямой AB и получить тот же квадрат, повернутый на 90^0. Это решение рассматривается аналогично.

Мы выразили числа m_2 и n_2 через m_1 и n_1. Однако, целые числа m_1 и n_1 нельзя выбирать совершенно произвольно, так как вычисленные затем по формулам (*) числа m_2 и n_2 должны также быть целыми. Можно в этой связи показать, что число n_1 все же можно выбирать произвольно, но тогда число m_1 должно иметь вид $m_1=5n_1+7k$, где k – уже произвольное целое число. Подставив полученное выражение для m_1 в формулу для площади $S=\left(m_1+2n_1\right)^2+\left(3m_1-n_1\right)^2$, получим

$$S=49\left(5n_1^2+14n_1k+10k^2\right).$$

Выражение в скобках принимает только целые положительные значения. Значит, меньше 49 площадь быть не может. Чтобы убедиться, что значение 49 достижимо, достаточно взять $m_1=-2, n_1=1, m_2=-1, n_2=3.$

Ответ: 49.

Задача 5

Заметим, что среди городов (0000), (1000), (2000) и (3000) любые два являются соседними. Значит, цветов надо минимум четыре. Покажем, что четырех цветов достаточно. Имеющиеся у нас цвета будем называть цвет-0, цвет-1, цвет-2, цвет-3. Флаг города будет окрашен в цвет, номер которого равен остатку от деления на 4 суммы цифр в названии этого города (например, для города (3201) этот остаток равен 2, значит, его флаг будет окрашен в цвет-2). У соседних городов эти остатки всегда различны, так как их названия отличаются *одной* цифрой. Следовательно, 4-х цветов достаточно.

Ответ: 4 цвета.

Задача 6

Для формирования величины x_5, которая будет проверяться на предмет того, принадлежит ли она множеству $\Omega_1 = \{10,11,12,13,14,15\}$, будут задействованы только последние два числа: a, b. Тогда процедура проверки будет выглядеть следующим образом:

$$x_5 = r_{16}(f^{-1}(b) - 3a) \overset{?}{\in} \Omega_1 .$$

Нетрудно догадаться по виду данной в условии таблицы, что структура каждого столбца с номером b таблицы с точки зрения возникающих ошибок x_5 будет следующей:

+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

$$a_j = r_{16}(a_1 + j),\ j = \overline{1,16} .$$

<u>Вариант рассуждений а).</u>

Выделяем случаи, когда $x_5 \in \Omega_1$ (помечены в таблице темным, далее по тексту условно обозначим $\Omega_1 + c$ - множество элементов Ω_1, к каждому из которых прибавлено число c и от получившихся значений взят остаток от деления на 16):

- при a_1 имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 = \{10,11,12,13,14,15\} ;$$

- при $a_2 = a_1 + 1$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 + 3 = \Omega_2 = \{13,14,15,0,1,2\} ;$$

- при $a_7 = a_1 + 6$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 + 2 = \Omega_7 = \{12,13,14,15,0,1\} ;$$

- при $a_8 = a_1 + 7$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 + 5 = \Omega_8 = \{15,0,1,2,3,4\} ;$$

- при $a_{12} = a_1 + 11$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 + 1 = \Omega_{12} = \{11,12,13,14,15,0\} ;$$

- при $a_{13} = a_1 + 12$ имеем

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) \in \Omega_1 + 4 = \Omega_{13} = \{14,15,0,1,2,3\} .$$

Нетрудно заметить, что $\Omega_1 \cap \Omega_8 = \{15\}$, то есть

$$r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) = 15 .$$

<u>Вариант рассуждений б).</u>

Ответим на вопрос, при каких значениях $x_5 = r_{16}(f^{-1}(b) - 3 \cdot a)$ возможна ситуация, что при проверке $x_5 \in \Omega_1$ при a_1 будет “+”, при $a_2 = a_1 + 1$ будет “+”, а при $a_3 = a_2 + 1,\ a_4 = a_3 + 1,\ a_5 = a_4 + 1,\ a_6 = a_5 + 1$ будет “-”. Исходя из приведенной ниже таблицы, нетрудно заметить, что только при $x_5 = r_{16}(f^{-1}(b) - 3a_1) = 15$.

$-3 \cdot a =$	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+
$x_5 =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	a_6			a_5			a_4			a_3			a_2			a_1

<u>Общий вывод из рассуждений а) или б):</u>

Если в таблице ошибок для x_5 при заданном b есть структура вида

+	+	-	-	-	-
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

то $r_{16}(f^{-1}(b)-3a_1)=15$, то есть $f^{-1}(b)=r_{16}(3a_1-1)$. Это является удобным критерием для определения обратных значений функции f.

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=11$. Из-за закономерностей в образовании “+” не трудно догадаться, что подходящей под критерий структурой будет

+	+	-	-	-	-
15	0	1	2	3	4

Поэтому $a_1=15$ и $f^{-1}(11)=r_{16}(3\cdot 15-1)=12$, что позволяет найти x_4:

$$x_4=r_{16}(f^{-1}(11)-3\cdot 1)=r_{16}(12-3)=9.$$

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=1$. Не трудно заметить, что подходящей под критерий структурой будет

+	+	-	-	-	-
3	4	5	6	7	8

Поэтому $a_1=3$ и $f^{-1}(1)=r_{16}(3\cdot 3-1)=8$, что позволяет найти x_3:

$$x_3=r_{16}(f^{-1}(1)-3\cdot 13)=r_{16}(8-7)=1.$$

Рассмотрим столбец из данной в условии таблицы с $b=13$. Из-за закономерностей в образовании “-” не трудно догадаться, что подходящей структурой будет

+	+	-	-	-	-
10	11	12	13	14	15

Поэтому $a_1=10$ и $f^{-1}(13)=r_{16}(3\cdot 10-1)=13$, что позволяет найти x_1, x_2:

$$x_1=r_{16}(f^{-1}(13)-3\cdot 2)=r_{16}(13-6)=7;$$

$$x_2=r_{16}(f^{-1}(13)-3\cdot 13)=r_{16}(13-7)=6.$$

Ответ: ПК Алисы 7,6,1,9.