



РЕШЕНИЯ

XXII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

8-9 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

1. Заметим, что если вторая (центральная) шестеренка повернута на x позиций по часовой стрелке относительно начального положения, то буква в окошке меняется на букву, отстоящую от нее на x позиций, но против часовой стрелки.

При этом шестеренки с цифрами будут повернуты **против часовой стрелки** и так как $30 = 5 \times 6$, то появившиеся в окошках цифры однозначно определяют величину x сдвига относительно начального положения, которым можно считать положение, при котором на цифровых шестеренках выставлены две единицы (см. таблицу).

цифра на 1-ом колесе	1	2	3	4	5
цифра на 3-ем колесе	1	2	3	4	5
1	0	6	12	18	24
2	25	1	7	13	19
3	20	26	2	8	14
4	15	21	27	3	9
5	10	16	22	28	4
6	5	11	17	23	29

Рассмотрим теперь текст:

11 55 16 53 21 16 31 15 52 14 16 44 46

Заменяем пары цифр на величины поворотов:

0		4	5	14	6	5	12	10	19		15	5	3	33
---	--	---	---	----	---	---	----	----	----	--	----	---	---	----

Предположим что первое слово – это предлог **У**. Тогда найдём числовые величины поворота второго колеса, соответствующие всем буквам.

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
8	7	6	5	4	3	2	1	0	29
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
28	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Заменяем величины поворотов на буквы, получим ответ.

Ответ: **У П О Д Н О Ж И Я Г О Р Ы**

6. Обозначим через $r_{257}(x)$ – остаток от деления на 257 числа x . Так как

$$r_{257}(a^x) = 9 = r_{257}(9) = r_{257}(3^2) = r_{257}\left(\left(r_{257}(a^t)\right)^2\right) = r_{257}(a^{2t}),$$

где $1 \leq t \leq 256$, $r_{257}(a^t) = 3$. Тогда $x = 2t$ или $x = 2t - 256 = 2t'$. Тогда

$$r_{257}(a^{xy}) = r_{257}\left(\left(256\right)^x\right) = r_{257}\left(r_{257}(-1)^x\right) = r_{257}\left(\left(-1\right)^{2t}\right) = 1$$

Ответ: **1**.



РЕШЕНИЯ

XXI МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

8-9 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

3. Если число городов m^k , а число провинций m и в каждой по m^{k-1} городов, то отнесем к каждой провинции с номером i города с названиями (a_0, \dots, a_{k-1}) , удовлетворяющими условиям: сумма $a_0 + a_2 \dots + a_{k-1}$ кратна i . Очевидно, что каждый город будет отнесен к какой-либо провинции, и любые два города в одной провинции будут отличаться не менее чем в 2-х символах.

4. Составим таблицу, в которой каждый столбец сформирован из букв, находящихся на той же клавише, что и исходная:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Г	Р	О	З	У	С	Д	У	Е	Т	Н	Е	Б	О	С	М	Е	Н	А
А	Р	М	Д	Р	Р	Д	Р	Д	Р	М	Д	А	М	Р	М	Д	М	А
Б	С	Н	Е	С	С	Е	С	Е	С	Н	Е	Б	Н	С	Н	Е	Н	Б
В	Т	О	Ж	Т	Т	Ж	Т	Ж	Т	О	Ж	В	О	Т	О	Ж	О	В
Г	У	П	З	У	У	З	У	З	У	П	З	Г	П	У	П	З	П	Г

Серым цветом выделены те тройки столбцов, которые, по всей видимости, отвечают вставленному пробелу. Так как символ пробела в тексте встречается чаще любой триграммы, то из приведенной таблицы можно сделать вывод, что знак пробела содержится именно в столбцах **РМД** (нетрудно из букв этих столбцов составить слово, например, **РОД**). При зигзагообразном чтении замечаем, что в столбцах 13,14,18,19 не прочитывается что-то осмысленное, поэтому на местах 15,16,17 пробела нет (это случайное совпадение).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Г	Р	О	З	У	С	Д	У	Е	Т	Н	Е	Б	О	С	М	Е	Н	А
А	Р	М	Д	Р	Р	Д	Р	Д	Р	М	Д	А	М	Р	М	Д	М	А
Б	С	Н	Е	С	С	Е	С	Е	С	Н	Е	Б	Н	С	Н	Е	Н	Б
В	Т	О	Ж	Т	Т	Ж	Т	Ж	Т	О	Ж	В	О	Т	О	Ж	О	В
Г	У	П	З	У	У	З	У	З	У	П	З	Г	П	У	П	З	П	Г

Ответ: **В СУЕТЕ ГОРОВОД**



РЕШЕНИЯ

XXI МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

8-9 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

5. По условию задачи в каждом наборе искажено не более двух бит. Заметим, что наборы из табл. 1, соответствующие различным буквам, отличаются по крайней мере в трех позициях. Отсюда следует, что искажение одного или двух битов в любом наборе из табл. 1, не делает его другим набором из табл. 1 (на это потребовалось бы по крайней мере три искажения). Значит все те наборы из письма Гены, которые соответствуют наборам из табл. 1, просто не были искажены. Выпишем, соответствующие им буквы:

УД*Р*А*Т*РТ*И*Т*С*Ч*Д*У*ИХ*Д*Р****

(“*” отмечены пока не известные буквы). Итак, уже имеется некоторая основа сообщения, которая поможет нам подобрать остальные буквы. Для восстановления третьей буквы требуется посмотреть, какие наборы из табл. 1 могли при искажении одного/двух битов стать набором $(0,0,1,0,0,0,0)$, и выбрать тот набор, которому соответствует буква, подходящая по смыслу. Так, набор $(0,0,1,0,0,0,0)$ мог быть получен из набора $(0,0,0,0,0,0,0)$ (при искажении третьего бита) или из набора $(1,0,1,0,0,1,0)$ (при искажении первого и седьмого битов) или из набора $(0,0,1,1,0,0,1)$ (при искажении четвертого и седьмого битов). Очевидно, что по смыслу подходит только набор $(0,0,0,0,0,0,0)$, соответствующий букве **А**. Аналогичным образом восстанавливаются остальные неизвестные буквы. В результате, получаем письмо Гены.

Ответ: **УДАР МАСТЕРА СТОИТ ТЫСЯЧИ ДРУГИХ
УДАРОВ**

2. Обозначим через $r_M(b)$ - остаток от деления числа b на M . Запишем чему равно число S' согласно определению деления натуральных чисел с остатком:

$$S' = r_M(S \cdot u) \Leftrightarrow Su = Mq_1 + S', 0 \leq S' < M, q_1 \in \mathbb{N}_0 \quad (1)$$

Поскольку известно, что остаток от деления $7 \cdot u$ на M равен 1, то запишем:

$$7u = Mq_2 + 1, q_2 \in \mathbb{N}_0 \quad (2)$$

Умножим обе части (1) на 7 и подставим в полученное равенство вместо $7 \cdot u$ равенство (2).

Имеем:

$$\begin{aligned} 7Su &= 7Mq_1 + 7S' \Rightarrow S(Mq_2 + 1) = 7Mq_1 + 7S' \\ 7S' &= M(Sq_2 - 7q_1) + S \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим далее, что натуральное число $S \leq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 31 < 32 = M$. Поэтому полученное равенство (3) есть не что иное, как деление $7S'$ с остатком на M и, кроме того, $r_M(7S') = S$. Таким образом, найдя остаток от деления $7S'$ на M , получим исходное число S .

В нашем случае, $S = r_M(7S') = r_{32}(7 \cdot 11) = r_{32}(77) = 13$. Теперь, зная S , осталось найти (x_1, x_2, x_3, x_4) . Но это делается легко. Действительно, равенство $x_4 = 0$ очевидно, поскольку $S < 16$. Далее можно перебрать все возможные восемь вариантов, либо сразу заметить, что $x_2 = x_3 = 1, x_1 = 0$ (что просто угадывается), либо последовательно вычитать из S числа a_3, a_2, a_1 пока не получим нуль, полагая при этом, что соответствующий $x_i = 1$.

Ответ: **(0,1,1,0)**.