РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
XX Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии

8-9 КЛАСС
ВАРИАНТ 1

Решение задачи 1.
Отметим, что восстановить исходный текст короткого сообщения, зашифрованного с использованием такого шифра (шифра простой замены) не так-то просто. Помогает здесь то, что в сообщении сохранена разбивка на слова, оставлены знаки препинания и заглавные буквы. Если обратить внимание на слово **`Яспар-Дюрюмгщмт`** и содержащееся в ответе Godzillы упоминание города **`Питера,`** то можно предположить, что здесь говориться о городе, название которого **`Санкт-Петербург`**. Составим таблицу соответствий:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
К			Б	П									Р			Н	Т	А	Г						У						Е	С

В соответствии с этой заменой некоторые буквы в тексте можно восстановить:

`. .А.ТРА УЕ..А. . САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА ..Е НЕ.Е.. . ПАР...: БУРГУН...`

Далее подбираем некоторые слова по смыслу. Пусть **`.А.ТРА`** это **`ЗАВТРА`**, **`ПАР...`** это **`ПАРОЛЬ`**:

`. ЗАВТРА УЕЗ.А. В САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА .ВЕ НЕ.ЕЛ. . ПАРОЛЬ: БУРГУН..Я`

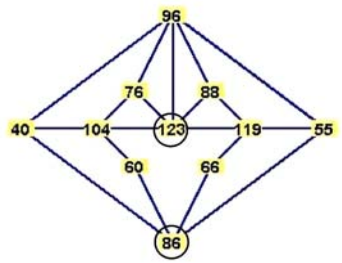
и по смыслу окончательно получаем искомое сообщение.

Ответ к задаче 1:

`Я ЗАВТРА УЕЗЖАЮ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГ НА ДВЕ НЕДЕЛИ. ПАРОЛЬ: БУРГУНДИЯ.`

Решение задачи 6. Разность значений многочленов должна делиться на разность значений переменной. Проверим выполнение этого факта для следующих пар значений: первого и второго, третьего и четвертого, первого и третьего, второго и четвертого.
173-137=36 делится на 3; 131-117=14 не делится на 3; следовательно, значение исказили гномы или орки.
173-131=42 не делится на 4; 137-117=20 делится на 4, следовательно, значение исказили тролли или гномы.
Ответ к задаче 6: Гномы сообщили неверное значение многочлена

Решение задачи 3. Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество V (отмеченное на рисунке кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из V. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая ее саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества V: 123+86=209. **Ответ к задаче 3:** 209



Решение задачи 4.
Для комбинации 1,0,1,1,0 – проход открыт, а для 0,0,1,1,0 – проход закрыт. То есть при изменении значения первой координаты с 1 на 0 значение суммы становиться меньше c, поэтому очевидно, что $a_1 > 0$. Аналогично:

$\begin{matrix}1,1,1,1,1 \text{ - открыто}\\ 1,0,1,1,1 \text{ - закрыто}\end{matrix} \Rightarrow a_2 > 0$; $\begin{matrix}1,1,1,1,1 \text{ - открыто}\\ 1,1,0,1,1 \text{ - закрыто}\end{matrix} \Rightarrow a_3 > 0$; $\begin{matrix}1,0,1,1,0 \text{ - открыто}\\ 0,0,1,1,0 \text{ - закрыто}\end{matrix} \Rightarrow a_4 > 0$; $\begin{matrix}1,0,1,1,0 \text{ - открыто}\\ 1,0,1,1,1 \text{ - закрыто}\end{matrix} \Rightarrow a_5 < 0$. Поэтому заведомо пройдет комбинация, максимизирующая значение суммы S: 1,1,1,1,0 (отметим, что других - нет).

Ответ к задаче 4: 1,1,1,1,0.

Решение задачи 5. Обозначим через x – число букв получившихся при наборе цифр 2 (их может быть от 1 до 3), y – число букв при наборе цифр 8 (одна или две) и z – число букв при наборе цифр 7 (от 2 до 5). Перечислим возможные варианты представления числа 10 в виде суммы x+1+y+z+1:

3+1+2+3+1, 3+1+1+4+1, 2+1+2+4+1, 2+1+1+5+1, 1+1+2+5+1.

Для каждого из них число паролей составит $\binom{2}{x-1}\binom{4}{z-1}$. Всего получаем $6+4+2\cdot 4+2+1=21$ вариант.

Ответ к задаче 5: 21.

Решение задачи 2. Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго - 2^3, после последнего – 2^6. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le 4$ в точках деления окружности на дуги стоят числа $x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}}$. Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа $y_1 = \dfrac{3x_1 + x_2}{2}, y_2 = \dfrac{3x_2 + x_3}{2}, \ldots, y_{2^{k+1}} = \dfrac{3x_{2^{k+1}} + x_1}{2}$. Видно, что $\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 2 \cdot \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i$. Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастет в 3 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 5, то получаем окончательный ответ.

Ответ к задаче 2: $5 \cdot 3^5$.