РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
XX Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии

10 класс

Решение задачи 1. По двум последним текстам можно восстановить обратную перестановку и использовать ее для расшифрования первого сообщения. Из-за повторов букв в этих сообщениях сделать это однозначно удаётся не всегда.

А	Б	А	Б	А	Б	Б	А	В	Г
А	Г	Б	В	А	А	Б	Б	А	Б

Н	М	П	Е	Р	О	Р	А	А	О

варианты обратной перестановки

1	10	2	9	1	1	2	2	1	2
3	10	4	9	3	3	4	4	3	4
5	10	6	9	5	5	6	6	5	6
8	10	7	9	8	8	7	7	8	7

варианты открытого текста

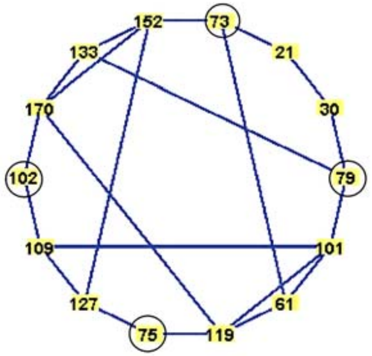
Н	О	М	А	**Н**	Н	**М**	М	Н	М
П	**О**	Е	А	П	П	Е	Е	П	**Е**
Р	О	О	А	Р	Р	О	**О**	**Р**	О
А	О	**Р**	**А**	А	**А**	Р	Р	А	Р

Таким образом, задача сводится к выбору букв из столбцов глубины не более 4-х, которые дают осмысленное сообщение. Жирным цветом выделены выбранные буквы, в серых клетках отмечены уже использованные буквы, не участвующие в выборе. **Ответ к задаче 1: ПОРА НА МОРЕ.**

Решение задачи 3.
Разность значений многочленов должна делиться на разность значений переменной. Проверим выполнение этого факта для следующих пар значений: первого и второго, третьего и четвертого, первого и третьего, второго и четвертого.
357-273=84 делится на 3; 497-391=106 не делится на 3; следовательно, значение исказили гномы или орки.
391-273=118 не делится на 4; 497-357=140 делится на 4, следовательно, значение исказили тролли или гномы.
Ответ к задаче 3: Гномы сообщили неверное значение многочлена

Решение задачи 6. Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго - 2^3, после последнего – 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le n$ в точках деления окружности на дуги стоят числа $x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}}$.Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа $y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}, y_2 = \frac{x_2+x_3}{2}, \ldots, y_{2^{k+1}} = \frac{x_{2^{k+1}}+x_1}{2}$. Видно, что $\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i$. Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастет в 2 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 8, то получаем окончательный ответ.
Ответ к задаче 6: 2^{n+3}

Решение задачи 4. Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество V (отмеченное на рисунке кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из V. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая ее саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества V: 75+102+73+79=329. **Ответ к задаче 4:** 329



Решение задачи 5.
Обозначим через x – число букв получившихся при наборе цифр 7 (их может быть от 1 до 2), y – число букв при наборе цифр 8 (от 2 до 4) и z – число букв при наборе цифр 2 (от 2 до 5). Перечислим возможные варианты представления числа 9 в виде суммы x+y+z+1:

1+2+5+1, 1+3+4+1, 1+4+3+1, 2+2+4+1, 2+3+3+1, 2+4+2+1.

Для каждого из них число паролей составит $\binom{3}{y-1}\binom{4}{z-1}$. Всего получаем $3+3\cdot4+6+3\cdot4+3\cdot6+4=52$ варианта.
Ответ к задаче 5: 52.

Решение задачи 2.
Составим систему неравенств исходя из условия задачи:
$$\begin{cases} 0 \ge c \\ a_3 < c \\ a_2 < c \\ a_2 + a_3 < c \\ a_1 \ge c \\ a_1 + a_3 < c \\ a_1 + a_2 \ge c \\ a_1 + a_2 + a_3 < c \end{cases}.$$
Из этой системы получаем следующие следствия:
$$\begin{cases} a_3 < c \\ 0 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_3 < 0, \begin{cases} a_2 < c \\ 0 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_2 < 0, \begin{cases} a_1 + a_3 < c \\ a_1 + a_2 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_2 > a_3,$$
$$\begin{cases} a_2 < c \\ a_1 + a_2 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_1 > 0, \begin{cases} 0 \ge c \\ a_1 + a_3 < c \end{cases} \Rightarrow a_1 + a_3 < 0.$$
Поэтому, можно, например, положить
$a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$. Тогда $-1 < c \le 0$, полагаем $c = 0$.
Ответ к задаче 2: $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = -2$, $c = 0$
(отметим, что возможны и другие решения – например геометрическое, заключающееся в нахождении уравнения плоскости, отсекающей три единичных вершины куба с длиной ребра 1 в трехмерном пространстве).