



# XIX

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ РЕШЕНИЯ

8-9 КЛАСС  
ВАРИАНТ 1

### Решение 1.

Заметим, что  $961=31^2$  и 31 - простое число. Теперь не трудно сообразить, что существует  $31(31-1)=930$  натуральных чисел, которые не превосходят число 961 и не имеют с ним общих делителей и отличных от 1.

ОТВЕТ: 930

### Решение 3.

Из условия задачи имеется 3 сообщения:

$$C_1 = M + K_G;$$

$$C_2 = C_1 + K_Q = M + K_G + K_Q;$$

$$C_3 = C_2 - K_G = M + K_Q,$$

где  $M$  - переданное открытое сообщение,  $K_G$  - последовательность, выбранная Крокодилем Геной;  $K_Q$  - последовательность, выбранная Чебурашкой. Тогда открытый текст можно найти следующим образом:  $M = C_1 - C_2 + C_3$ .

ОТВЕТ: С Е М Ъ Р А З О Т М Е Р Ь О Д И Н О Т Р Е Ж Ъ

### Решение 4.

Заметим, если повернуть грань четыре раза, то это то же самое, что её не поворачивать вообще, а совершение трех поворотов по часовой стрелке эквивалентно одному повороту против часовой стрелке. Таким образом, чтобы узнать, как были расположены буквы при шифровании, необходимо повернуть грань 1 – два раза; грань 2 – один раз (против часовой стрелки); грань 3 – один раз; грань 4 – не поворачивать; грань 5 – два и, наконец, грань 6 – один раз. Нет необходимости узнавать, куда перешли все написанные на кубе буквы. Достаточно узнать расположение букв шифртекста после описанных преобразований. После этого следует выделить ячейку, следующую за ячейкой с рассматриваемой буквой из шифртекста против часовой стрелки. Затем осуществить обратное преобразование и в выделенной ячейке на исходном кубе будет находиться соответствующая буква открытого текста.

ОТВЕТ: Джероламо Кардано

### Решение 6.

Заметим, что на нечетных местах исходного текста могут появляться только цифры 0,1,2 и 3. Поэтому, если из одного шифртекста вычесть другой, зашифрованный с помощью той же последовательности, на нечетных местах разности могут получиться не любые цифры, а только 0,1,2,3,7,8,9, что будет являться критерием для выбора искомого цепочек.

ОТВЕТ: вторая и третья

### Решение 2.

Способ 1. Поскольку для длин сторон  $AB = 99$ ,  $AC = 71$   $\text{НОД}(99,71) = 1$ , и для значений углов  $67^\circ$  и  $360^\circ$   $\text{НОД}(67,360) = 1$ , то по схеме алгоритма Евклида можно построить отрезок длины 1 и угол, равный  $1^\circ$ .

Схема алгоритма Евклида с помощью циркуля и линейки реализуется следующим образом. Сначала на большом отрезке  $AB$  последовательно от т. А засечками циркуля откладывается малый отрезок  $AC$  наибольшее возможное число раз, в данном случае 1 раз; получается остаток длины 18. Затем на  $AC$  наибольшее число раз откладывается этот остаток, получается новый остаток и т.д. В конце концов получится остаток длины 1.

Опишем окружность произвольного радиуса с центром в т. А. Возьмем раствор циркуля, равный расстоянию между точками пересечения окружности с полупрямыми  $AB$  и  $AC$ . Этим циркулем отложим последовательно на окружности дуги, соответствующие центральному углу  $\angle BAC = 67^\circ$  наибольшее возможное количество раз, тем самым обнаруживается угол, равный в градусах остатку от деления 360 на 67, т.е.  $25^\circ$ . Затем этот остаток раствором циркуля отложим наибольшее число раз на дуге, соответствующей центральному углу  $67^\circ$ , т.е. 2 раза; получим остаток  $17^\circ$  и т.д. В результате получится угол, равный  $1^\circ$ .

Способ 2: Не составляет труда построить угол в  $90^\circ$ , а также угол в  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , кроме того, в условии дан угол в  $67^\circ$ . Искомый угол в  $51^\circ$  может быть построен из соотношения:  $51^\circ = 67^\circ - 16^\circ$ , поэтому достаточно научиться строить угол в  $16^\circ$ . Для этого можно заметить, что  $16^\circ = 2 \cdot 90^\circ - 2 \cdot 67^\circ - 30^\circ$ . Поэтому  $51^\circ = 3 \cdot 67^\circ + 30^\circ - 2 \cdot 90^\circ$ .

Для построения отрезков длиной 101 и 73 можно заметить, что:

$$101 = 7 \cdot 71 - 4 \cdot 99;$$

$$73 = 8 \cdot 71 - 5 \cdot 99.$$

### Решение 5.

Полученное английское слово переводится в числовой вид и формируются столбцы длины 3: букве переданного русского пароля может соответствовать данное числовое значение, либо значение плюс 7, либо минус 7 (табл. 1).

ОТВЕТ: ЩЕНОК



# МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ

## РЕШЕНИЯ

8-9 КЛАСС  
ВАРИАНТ 2

### Решение 1.

Заметим, что  $841=29^2$  и 29 - простое число. Теперь не трудно сообразить, что существует  $29(29-1)=812$  натуральных чисел, которые не превосходят число 841 и не имеют с ним общих делителей и отличных от 1.

ОТВЕТ: 812

### Решение 3.

Из условия задачи имеется 3 сообщения:

$$C_1 = M + K_r;$$

$$C_2 = C_1 + K_q = M + K_r + K_q;$$

$$C_3 = C_2 - K_r = M + K_q,$$

где  $M$  - переданное открытое сообщение,  $K_r$  - последовательность, выбранная Крокодилем Геной;  $K_q$  - последовательность, выбранная Чебурашкой. Тогда открытый текст можно найти следующим образом:  $M = C_1 - C_2 + C_3$ .

ОТВЕТ: **Т И Ш Е Е Д Е Ш Ь Д А Л Ь Ш Е Б У Д Е Ш Ь**

### Решение 4.

Заметим, если повернуть грань четыре раза, то это то же самое, что её не поворачивать вообще, а совершение трех поворотов по часовой стрелке эквивалентно одному повороту против часовой стрелке. Таким образом, чтобы узнать, как были расположены буквы при шифровании, необходимо повернуть грань 1 - два раза; грань 2 - один раз; грань 3 - один раз (против часовой стрелки); грань 4 - два раза; грань 5 - один раз и, наконец, грань 6 - не поворачивать. Нет необходимости узнавать, куда перешли все написанные на кубе буквы. Достаточно узнать расположение букв шифртекста после описанных преобразований. После этого следует выделить ячейку, следующую за ячейкой с рассматриваемой буквой из шифртекста против часовой стрелки. Затем осуществить обратное преобразование и в выделенной ячейке на исходном кубе будет находиться соответствующая буква открытого текста.

ОТВЕТ: Леон Альберти

### Решение 6.

Заметим, что на нечетных местах исходного текста могут появляться только цифры 0,1,2 и 3. Поэтому, если из одного шифртекста вычесть другой, зашифрованный с помощью той же последовательности, на нечетных местах разности могут получиться не любые цифры, а только 0,1,2,3,7,8,9, что будет являться критерием для выбора искомого цепочек.

ОТВЕТ: первая и третья

### Решение 2

Поскольку для длин сторон  $AB = 89$ ,  $AC = 53$   $\text{НОД}(89, 53) = 1$ , и для значений углов  $73^\circ$  и  $360^\circ$   $\text{НОД}(73, 360) = 1$ , то по схеме алгоритма Евклида можно построить отрезок длины 1 и угол, равный  $1^\circ$ .

Схема алгоритма Евклида с помощью циркуля и линейки реализуется следующим образом. Сначала на большом отрезке  $AB$  последовательно от т. А засечками циркуля откладывается малый отрезок  $AC$  наибольшее возможное число раз, в данном случае 1 раз. Получается остаток длины 36. Затем на  $AC$  наибольшее число раз откладывается этот остаток, получается новый остаток и т.д. В конце концов получится остаток длины 1.

Опишем окружность произвольного радиуса с центром в т. А. Возьмем раствор циркуля, равный расстоянию между точками пересечения окружности с полупрямыми  $AB$  и  $AC$ . Этим циркулем отложим последовательно на окружности дуги, соответствующие центральному углу  $\angle BAC = 73^\circ$  наибольшее возможное количество раз, тем самым обнаруживается угол, равный в градусах остатку от деления 360 на 73, т.е.  $68^\circ$ . Затем этот остаток раствором циркуля отложим наибольшее число раз на дуге, соответствующей центральному углу  $73^\circ$ , т.е. 1 раз; получим остаток  $5^\circ$  и т.д.. В результате получится угол, равный  $1^\circ$ .

Способ 2: Не составляет труда построить угол в  $90^\circ$ , а также угол в  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , кроме того, в условии дан угол в  $67^\circ$ . Искомый угол в  $57^\circ$  может быть построен из соотношения:  $57^\circ = 4 \cdot 90^\circ + 15^\circ - 6 \cdot 53^\circ$ .

Для построения отрезков длиной 91 и 55 можно заметить, что:

$$91 = 4 \cdot 89 - 5 \cdot 53;$$

$$55 = 3 \cdot 89 - 4 \cdot 53.$$

### Решение 5.

Полученное английское слово переводится в числовой вид и формируются столбцы длины 3: букве переданного русского пароля может соответствовать данное числовое значение, либо значение плюс 7, либо минус 7 (табл. 1).

ОТВЕТ: ЭПОХА