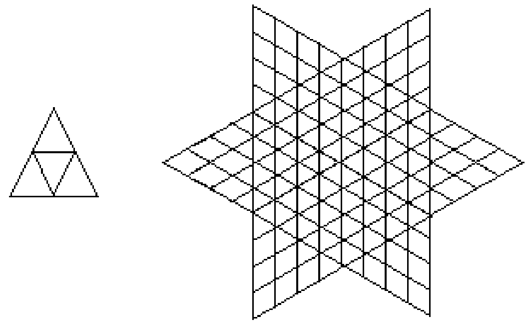
Задачи для 9 класса

1. См. задачу 8.1.

    1. На левом рисунке изображены пять треугольников (четыре маленьких и один большой). А сколько треугольников на правом рисунке?

    Решение. Заметим, что каждые три непараллельные прямые либо пересекаются в одной точке, либо задают треугольник. Количество троек прямых равно 9^3, а количество точек $5+6+7+8+9+8+7+6+5 = 61$. Поэтому треугольников $729 - 61 = 668$.

2. См. задачу 8.3.

    3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60^\circ$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6, CD = 4, EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

    Решение. Ясно, что все остальные углы равны 120 градусов, поэтому $AB \parallel DE$ и $BC \parallel AE$. Также $DE = 2$ и $BC = 3$. Искомое расстояние — это высота правильного треугольника со стороной 9 (до которого можно достроить исходный пятиугольник), то есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

3. Вычислите площадь множества точек на координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству $(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leqslant 0$.

    Решение. Левая часть имеет смысл только при $0 \leqslant x \leqslant 1$. При этом требуется, чтобы $y+\sqrt{x}$ и $y-x^2$ имели разные знаки (или одно из них равнялось нулю), или чтобы x равнялся 1. Если исключить вариант $x = 1$ (дающий нулевую площадь), то остаётся часть плоскости, ограниченная отрезком прямой $x = 1$ и частями парабол $y = -\sqrt{x}$ и $y = x^2$. Разрезав эту фигуру на две части по оси абсцисс и переложив верхнюю часть под нижнюю, получим квадрат площади 1.

    Ответ: площадь равна 1.

4. Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

Решение. Все подарили разное число конфет, при этом никто не дарил сам себе, поэтому были подарены все количества от 0 до $N-1$. Значит, всего подарено $\frac{N(N-1)}{2}$, и это число должно делиться на N. А это возможно только при нечётном N (при четном будет остаток $\frac{N}{2}$).

Пример для нечётного N будем строить по индукции. Если $N = 1$, то никто ничего не дарит. Иначе пусть последний ребёнок подарил по конфете всем остальным, а все дети со второго по $(N-1)$-й подарили по конфете первому и последнему (так как N нечётное, можно это сделать так, чтобы в итоге первый и последний получили нужное число конфет). Теперь для детей с второго по $(N-1)$-го можно применить предположение индукции.

5. Натуральное число n назовём *кубоватым*, если $n^3 + 13n - 273$ является кубом натурального числа. Найдите сумму всех кубоватых чисел.

   Решение. Если $0 < 13n - 273 < 3n^2 + 3n + 1$, то n не может быть кубоватым. Эти неравенства равносильны $n > 21$, так что осталось перебрать все остальные числа.

   Если $n = 21$, то $13n - 273 = 0$, так что 21 кубоватое. При $n < 21$ обязательно $13n - 273 < 0$, так что пока $13n - 273 > -3n^2 + 3n - 1$, число n не будет кубоватым (т.е. при $8 < n < 21$).

   Если $n = 8$, то $13n - 273 = -169 = -3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 - 1$, так что оно кубоватое. При $n \leqslant 5$ выражение $n^3 + 13n - 273$ будет отрицательным, так что они точно не кубоватые. Числа 6 и 7 не кубоватые, это можно проверить непосредственно. Итого ответ $8 + 21 = 29$.