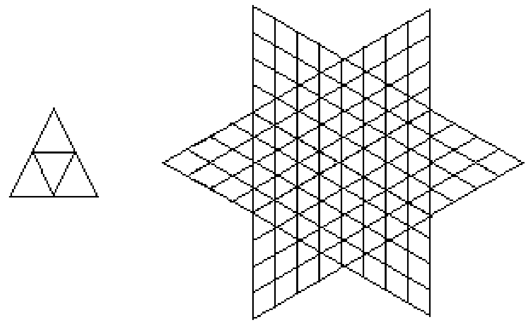
Задачи для 8 класса

1. На левом рисунке изображены пять треугольников (четыре маленьких и один большой). А сколько треугольников на правом рисунке?



Решение. Заметим, что каждые три непараллельные прямые либо пересекаются в одной точке, либо задают треугольник. Количество троек прямых равно 9^3, а количество точек $5+6+7+8+9+8+7+6+5=61$. Поэтому треугольников $729-61=668$.

2. См. задачу 7.4.

4. Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

Решение. Пусть двузначные квадраты равны x^2, y^2 и z^2, тогда $x, y, z \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Шестизначное число обозначим t^2 $(t > 0)$. Тогда

$$t^2 = 10000x^2 + 100y^2 + z^2 = (100x)^2 + (10y)^2 + z^2.$$

Пусть $t = 100x + k$. Очевидно, $k \in \mathbb{N}$, так как $t^2 > (100x)^2$. Тогда

$$\begin{aligned}(100x)^2 + (10y)^2 + z^2 &= (100x+k)^2,\\ 100y^2 + z^2 &= 200kx + k^2.\end{aligned}$$

Разберём случаи. Если $k \geqslant 11$, то правая часть $\geqslant 200 \cdot 11 \cdot 4 + 11^2 = 8921$, но левая часть $\leqslant 8181$. Если $k = 10$, то правая часть делится на 100, а левая не делится. Наконец, пусть $k < 10$. Тогда k^2 — это остаток от деления левой части на 100, поэтому $k = z$. Таким образом, $100y^2 = 200zx$, то есть $y^2 = 2zx$. Но при $4 \leqslant z, x \leqslant 9$ число $2zx$ может быть квадратом только при $\{x, z\} = \{8, 9\}$ или $\{x, z\} = \{8, 4\}$. В первом случае $2zx > 100$, так что он не подходит, а во втором случае получается $y = 8$. Ответ: $166464 = 408^2$ и $646416 = 804^2$.

3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60^\circ$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6, CD = 4, EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

Решение. Ясно, что все остальные углы равны 120 градусов, поэтому $AB \parallel DE$ и $BC \parallel AE$. Также $DE = 2$ и $BC = 3$. Искомое расстояние — это высота правильного треугольника со стороной 9 (до которого можно достроить исходный пятиугольник), то есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

4. См. задачу 7.5.

5. Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x+1$ кратно 2019», «$x+2$ кратно 2018», «$x+3$ кратно 2017», ... «$x+2017$ кратно 3», «$x+2018$ кратно 2» ровно половина верных?

   Решение. Заметим, что условия можно заменить следующими: «x+2020 кратно 2019», «x+2020 кратно 2018», «x+2020 кратно 2017», ... «x+2020 кратно 3», «x+2020 кратно 2». Таким образом, $x + 2020$ должно делиться на половину из чисел $2, 3, \ldots, 2019$. Подходит, например, $x + 2020 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2019$.

5. Двое играют в такую игру. Первый загадывает 8 действительных чисел (не обязательно различных) и пишет на листочке все их попарные суммы в произвольном порядке (некоторые из них могут совпадать). Второй по полученным 28 суммам должен определить исходные числа. Всегда ли он может гарантированно это сделать?

   Решение. Нет. Например, нельзя различить следующие два набора чисел:
   1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20 и 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19.
   Или такие: -1, -1, -1, 1, 0, 2, 2, 2 и -2, 0, 0, 0, 3, 1, 1, 1.