Задачи для 7 класса

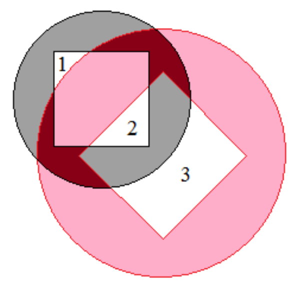
1. См. задачу 5.3.

   3. Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

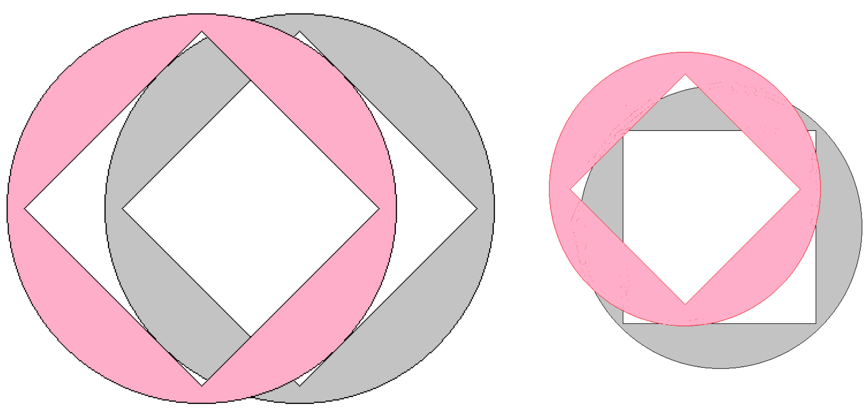
   Решение. Пусть первая ворона съела x грамм сыра. Тогда лисе от первой вороны досталось $100 - x$ грамм сыра. Вторая ворона съела $\frac{x}{2}$ грамм сыра. От второй вороны лиса получила $200-\frac{x}{2}$ грамм сыра. Это было втрое больше, значит: $200-\frac{x}{2} = 3(100-x)$. Решение: $x = 40$. Лиса съела 240 грамм.

2. См. задачу 6.3.

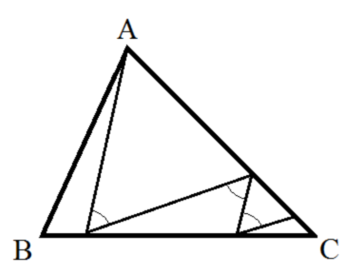
   3. Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3). А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?

   Решение. Можно, например, как на этих рисунках.

3. Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$, $AC = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на $60°$ и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 9,9 метров?



Решение. Пусть муха вылетела под углом 60 градусов к прямой AC. Рассмотрим равносторонний треугольник AKC со стороной AC. Заметим, что его стороны AK и KC можно разбить на части (на бесконечно много частей) так, чтобы каждая часть равнялась очередному отрезку траектории мухи. Сумма этих частей равна $AK+KC=$ 10 м, поэтому в какой-то момент муха пролетит больше 10 метров.

4. Три ученика написали на доске по двузначному числу, каждое из которых является точным квадратом. Оказалось, что если «склеить» их в одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа. Найдите все такие шестизначные числа.

   Решение. Пусть двузначные квадраты равны x^2, y^2 и z^2, тогда $x, y, z \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Шестизначное число обозначим t^2 ($t > 0$). Тогда

$$t^2 = 10000x^2 + 100y^2 + z^2 = (100x)^2 + (10y)^2 + z^2.$$

   Пусть $t = 100x + k$. Очевидно, $k \in \mathbb{N}$, так как $t^2 > (100x)^2$. Тогда

$$\begin{aligned} (100x)^2 + (10y)^2 + z^2 &= (100x + k)^2, \\ 100y^2 + z^2 &= 200kx + k^2. \end{aligned}$$

   Разберём случаи. Если $k \geqslant 11$, то правая часть $\geqslant 200 \cdot 11 \cdot 4 + 11^2 = 8921$, но левая часть $\leqslant 8181$. Если $k = 10$, то правая часть делится на 100, а левая не делится. Наконец, пусть $k < 10$. Тогда k^2 — это остаток от деления левой части на 100, поэтому $k = z$. Таким образом, $100y^2 = 200zx$, то есть $y^2 = 2zx$. Но при $4 \leqslant z, x \leqslant 9$ число $2zx$ может быть квадратом только при $\{x, z\} = \{8, 9\}$ или $\{x, z\} = \{8, 4\}$. В первом случае $2zx > 100$, так что он не подходит, а во втором случае получается $y = 8$. Ответ: $166464 = 408^2$ и $646416 = 804^2$.

5. Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x+1$ кратно 2019», «$x + 2$ кратно 2018», «$x + 3$ кратно 2017», … «$x + 2017$ кратно 3», «$x + 2018$ кратно 2» ровно половина верных?

   Решение. Заметим, что условия можно заменить следующими: «$x+2020$ кратно 2019», «$x+2020$ кратно 2018», «$x+2020$ кратно 2017», … «$x+2020$ кратно 3», «$x+2020$ кратно 2». Таким образом, $x + 2020$ должно делиться на половину из чисел $2, 3, \ldots, 2019$. Подходит, например, $x + 2020 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2019$.