Задачи для 6 класса

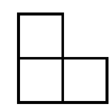
1. См. задачу 5.3.

   3. Двум воронам как-то бог послал немного сыру. Первой вороне досталось 100 г, из которых часть отняла лисица. Кусочек у второй вороны оказался вдвое больше, чем у первой, но и съесть она успела вдвое меньше, чем первая ворона. Доставшаяся же лисице часть сыра от второй вороны оказалась втрое больше, чем от первой. Сколько всего сыра досталось лисице?

   Решение. Пусть первая ворона съела x грамм сыра. Тогда лисе от первой вороны досталось $100 - x$ грамм сыра. Вторая ворона съела $\frac{x}{2}$ грамм сыра. От второй вороны лиса получила $200 - \frac{x}{2}$ грамм сыра. Это было втрое больше, значит: $200 - \frac{x}{2} = 3(100 - x)$. Решение: $x = 40$. Лиса съела 240 грамм.

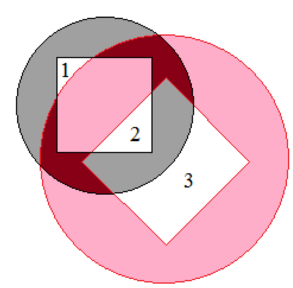
2. См. задачу 5.4.

   4. У Вити есть белая доска из 16 клеток в форме квадрата 4×4, из которой он хочет вырезать 4 белых трёхклеточных уголка. Петя же хочет ему помешать, окрашивая некоторые клетки в красный цвет. Какое наименьшее количество клеток ему придётся закрасить? (Уголок — фигура, показанная на рисунке, возможно, повёрнутая.)

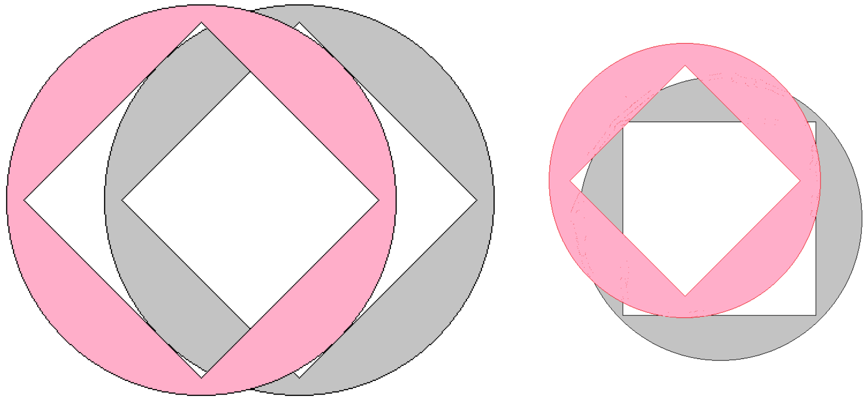
   

   Решение. Если вырезать из доски одну клетку (любую), то оставшуюся часть можно разбить на пять уголков. Если вырезать ещё одну, то четыре из этих пяти уголков сохранятся. Поэтому одной или двух вырезанных клеток недостаточно, чтобы помешать Вите. Постановки трех клеток (например, подряд по одной из главных диагоналей) - достаточно.

3. Будем называть *странным кольцом* круг с квадратной дыркой в середине (центры квадрата и круга совпадают; оставшаяся часть круга при этом не должна распадаться на части). Если положить на стол два странных кольца, то может получиться фигура с несколькими дырками (например, на рисунке их 3). А можно ли вырезать из бумаги два странных кольца и положить их на стол так, чтобы получилось больше 5 дырок?

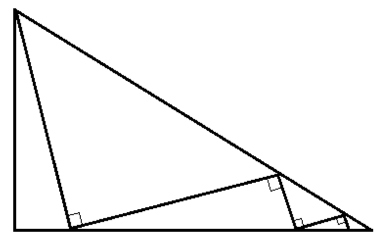
   

   Решение. Можно, например, как на этих рисунках.



4. См. задачу 5.5.

5. Муха сидит в одном из острых углов комнаты, имеющей форму прямоугольного треугольника, самая длинная из сторон которого равна 5 м. В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает под прямым углом и продолжает лететь по прямой (см. рисунок). Коснувшись стены в десятый раз, она останавливается. Может ли муха пролететь больше 10 метров?



Решение. Гипотенуза (сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла) больше любого из катетов (двух другших его сторон), значит, удвоенная длина гипотенузы будет больше суммы длин двух других катетов. Траекторию полёта мухи можно разложить на 5 прямоугольных треугольников, где гипотенуза является частью исходной гипотенузы. То есть, даже пролетев из одного острого угла в другой, длина пути мухи будет меньше 10 метров.

5. Существует ли такое натуральное число x, что среди утверждений «$x+1$ кратно 19», «$x+2$ кратно 18», «$x+3$ кратно 17», …«$x+17$ кратно 3», «$x+18$ кратно 2» ровно половина верных?

Решение. Заметим, что условия можно заменить следующими: «$x+20$ кратно 19», «$x+20$ кратно 18», «$x+20$ кратно 17», …«$x+20$ кратно 3», «$x+20$ кратно 2». Таким образом, $x+20$ должно делиться на половину из чисел $2, 3, \ldots, 19$. Подходит, например, $x+20 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 19$.