Задачи для 10 класса

1. Мотоциклист выехал из пункта A с начальной скоростью 90 км/ч, равномерно ее увеличивая (то есть за одинаковые промежутки времени его скорость увеличивается на одинаковую величину). Через три часа мотоциклист прибыл в пункт B, по дороге проехав через C. После этого он развернулся и, по-прежнему равномерно увеличивая скорость, поехал обратно. Еще через два часа он проехал мимо пункта C со скоростью 110 км/ч и продолжил движение в A. Найдите расстояние между пунктами A и C.

   Решение. За 5 часов скорость изменилась с 90 км/ч до 110 км/ч, поэтому ускорение равно 4 км/ч^2. От A до B расстояние равно
   $$90 \cdot 3 + \frac{4}{2} \cdot 3^2 = 270 + 18 = 288\,(\text{км}),$$
   от B до C —
   $$110 \cdot 2 - \frac{4}{2} \cdot 2^2 = 220 - 8 = 212\,(\text{км}).$$
   А нужное расстояние составляет 76 км.

2. См. задачу 8.3.

   3. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle A = 60°$, а остальные углы равны между собой. Известно, что $AB = 6, CD = 4, EA = 7$. Найдите расстояние от точки A до прямой CD.

      Решение. Ясно, что все остальные углы равны 120 градусов, поэтому $AB \parallel DE$ и $BC \parallel AE$. Также $DE = 2$ и $BC = 3$. Искомое расстояние — это высота правильного треугольника со стороной 9 (до которого можно достроить исходный пятиугольник), то есть $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

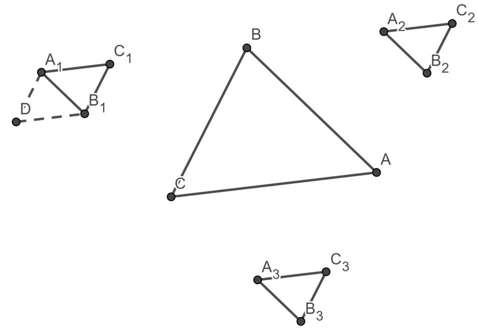
3. Докажите, что для всех положительных чисел a и b выполняется неравенство $\left(a^{2018} + b^{2018}\right)^{2019} > \left(a^{2019} + b^{2019}\right)^{2018}$.

   Решение. Не умаляя общности, $a \geqslant b$. Обозначим 2018 через n. Тогда неравенство можно переписать в виде
   $$a^{n(n+1)} + \binom{n+1}{1} a^{n^2} b^n + \ldots + \binom{n+1}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} + \ldots + b^{n(n+1)} >$$
   $$> a^{(n+1)n} + \binom{n}{1} a^{(n+1)(n-1)} b^{n+1} + \ldots + \binom{n}{k} a^{(n+1)(n-k)} b^{(n+1)k} + \ldots + b^{(n+1)n},$$
   где $\binom{m}{k} = C_m^k$ биномиальные коэффициенты.
   Так как $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ при $0 < k < n+1$, то левая часть заведомо строго больше $a^{n(n+1)} + \binom{n}{1} a^{n^2} b^n + \ldots + \binom{n}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} + \ldots + \binom{n}{n} a^n b^{n^2} + b^{n(n+1)}$. Так как $a \geqslant b$, то есть неравенства $\binom{n}{k} a^{n(n+1-k)} b^{nk} \geqslant \binom{n}{k} a^{(n+1)(n-k)} b^{(n+1)k}$. Если теперь их сложить и добавить неравенство $b^{n(n+1)} > 0$, получится требуемое неравенство.

4. На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

Решение. Обозначим точки через A, B, C, X, Y, и пусть ABC имеет наибольшую площадь S среди всех треугольников с вершинами в этих точках. Нужно доказать, что все площади остальных треугольников не могут быть больше $\frac{2}{3}S$. Пусть это не так, тогда все площади заключены между S и $\frac{2}{3}S$. Для ABX, BCX и CAX это условие значит, что X находится в одном из трёх маленьких треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ снаружи ABC, и аналогично для Y.

Если X и Y попали в один такой маленький треугольник (не умаляя общности, в $A_3B_3C_3$), то AXY и BXY будут иметь площадь не больше $\frac{1}{3}S$, потому что эти треугольники содержатся в треугольниках AA_3C_3 и BB_3C_3, имеющие площадь ровно $\frac{1}{3}S$. Если же они попали в разные треугольники (не умаляя общности, в $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$), то XCY имеет площадь строго меньше $\frac{2}{3}S$. Действительно, если отразить X или Y относительно C, то площадь треугольника XCY не изменится, и он окажется в четырёхугольнике CC_1A_1D. Площадь четырёхугольника равна $\frac{2}{3}S$, и она явно не может вся покрываться треугольником.



5. См. задачу 9.5.

5. Натуральное число n назовём *кубоватым*, если $n^3 + 13n - 273$ является кубом натурального числа. Найдите сумму всех кубоватых чисел.

   Решение. Если $0 < 13n - 273 < 3n^2 + 3n + 1$, то n не может быть кубоватым. Эти неравенства равносильны $n > 21$, так что осталось перебрать все остальные числа.

   Если $n = 21$, то $13n - 273 = 0$, так что 21 кубоватое. При $n < 21$ обязательно $13n - 273 < 0$, так что пока $13n - 273 > -3n^2 + 3n - 1$, число n не будет кубоватым (т.е. при $8 < n < 21$).

   Если $n = 8$, то $13n - 273 = -169 = -3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 - 1$, так что оно кубоватое. При $n \leqslant 5$ выражение $n^3 + 13n - 273$ будет отрицательным, так что они точно не кубоватые. Числа 6 и 7 не кубоватые, это можно проверить непосредственно. Итого ответ $8 + 21 = 29$.