Задачи для 9 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 3.

2. Медиантой двух несократимых дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ называется несократимая дробь, значение которой равно $\frac{m+p}{n+q}$. Приведите пример девяти несократимых дробей, каждая из которых, кроме двух крайних, служила бы медиантой для двух соседних с ней (в порядке возрастания).

3. Можно ли отметить на плоскости пять точек, не лежащих на одной прямой, так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них выражалось целым числом?

4. Назовём натуральное число хорошим, если все цифры, входящие в его запись, повторяются в ней хотя бы дважды (например, 1522521 — хорошее, 1522522 — нет). Сколько существует семизначных хороших чисел без нуля в записи?

5. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом A. На сторонах AB и AC вовне $\triangle ABC$ построены равные остроугольные треугольники ABP и ACQ ($PB = AQ$). Прямые PB и CQ пересекаются в точке M. Докажите, что: а) $PA \perp QC$; б) $MA \perp PQ$.

6. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Сколько решений имеет следующее уравнение?
$$S(n) + S^2(n) + \ldots + S^{2016}(n) = 2017^{2017}.$$
Здесь $S^2(n) = S(S(n))$, $S^3(n) = S(S^2(n))$, $S^4(n) = S(S^3(n))$ и т. д.

7. См. задания для 8 класса, задача 7.

8. Точки числовой оси закрашены в 4 цвета. Соответствующие чётным числам — чёрные, нечётным — белые, на интервалах от чёрных к белым (по возрастанию) — красные, а на интервалах от белых к чёрным — синие. В стартовый момент времени два кузнечика находятся в разных точках A и B между 0 и 1. Через каждую единицу времени оба кузнечика совершают прыжок, удваивающий их координату (первый — в точки $2A$, $4A$, $8A$ и т. д., второй — в $2B$, $4B$, $8B$ и т. д.). Можно ли утверждать, что в некоторый момент времени кузнечики окажутся в точках, закрашенных в разные цвета?