Решения задач для 9 класса

1. Какое максимальное количество чисел можно выбрать из множества $\{1, 2, \ldots, 12\}$, чтобы произведение никаких трёх выбранных чисел не равнялось точному кубу?

   Решение. 9: все, кроме 4, 9, 12. Заметим, что для удаления кубов надо убрать хотя бы по одному элементу каждого из множеств $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6, 12\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 9\}$, $\{2, 9, 12\}$, $\{3, 8, 9\}$, $\{4, 6, 9\}$. Заметим, что все числа, кроме 9, входят не более чем в три из этих семи троек. Поэтому если убрать два числа, отличных от 9, то хотя бы одна тройка останется. Если же убрать число 9, то среди оставшихся троек будут две непересекающихся ($\{1, 2, 4\}$, $\{3, 6, 12\}$), поэтому какое бы второе число мы ни убрали, одна из троек останется.

2. См. задания для 8 класса, задача 3.

3. Найдите наименьшее возможное значение выражения
$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} + \frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right),$$
   где x, y, z — ненулевые вещественные числа.

   Решение. Заметим, что знаки всех шести чисел $\frac{xy}{z}$, $\frac{zx}{y}$ и т.д. одинаковы. Если все они отрицательны, то заменим числа x, y, z на их модули, тогда все слагаемые ($\frac{xy}{z}$ и т. д.) поменяют знак. В результате модуль каждой скобки сохранится, а знак изменится, поэтому произведение двух скобок останется прежним. Следовательно, любое значение, принимаемое выражением, принимается им и при положительных x, y, z.

   При положительных значениях x, y, z воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Получим:
$$\left(\frac{xy}{z}+\frac{zx}{y}+\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\right) \geqslant 3\sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{zx}{y}\cdot\frac{yz}{x}}\cdot 3\sqrt{\frac{x}{yz}\cdot\frac{y}{zx}\cdot\frac{z}{xy}} = 9\sqrt{\frac{(xyz)^2}{xyz}\cdot\frac{xyz}{(xyz)^2}} = 9.$$

   Очевидно, значение 9 достигается, например, при $x = y = z = 1$.

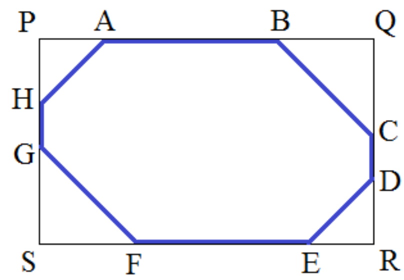
4. Все углы выпуклого восьмиугольника равны, а все стороны имеют рациональную длину. Докажите, что у него есть центр симметрии.

   Решение. Обозначим восьмиугольник $ABCDEFGH$. Продлим его стороны, взятые через одну, до пересечения (см. чертёж), тогда образованный ими четырёхугольник $PQRS$ — прямоугольник. Действительно, два внешних угла $\triangle HAP$ составляют по 135°, значит, два внутренних — по 45°, поэтому третий — прямой; то же и для углов Q, R, S.

Докажем, что противоположные стороны восьмиугольника (например, AB и EF) равны. Действительно, пусть это не так, тогда их разность равна разности сумм проекций четырёх других сторон на их направление:

$$AB - EF = (PQ - PA - QB) - (RS - RE - SF) =$$

$$= RE + SF - PA - QB = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (DE + FG - HA - BC).$$



Но $AB - EF$ — рациональное и ненулевое число, значит, величина $DE + FG - HA - BC$ иррациональна, что противоречит условию.

Так же доказывается, что $BC = FG$, $DE = HA$. Значит, треугольники HAP и DER равны (равнобедренные прямоугольные треугольники с равными гипотенузами), поэтому при симметрии относительно центра $PQRS$ отрезки DE и HA совместятся. Также совместятся отрезки BC и FG. Значит, восьмиугольник центрально симметричен, что и требовалось доказать.

5. В каждую клетку таблицы 10×10 записали натуральное число. Потом закрасили каждую из клеток, для которой выполняется свойство: число, написанное в этой клетке, меньше одного из своих соседей, но больше другого соседа. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) В результате незакрашенными остались только две клетки, причём ни одна из них не находится в углу. Какова минимально возможная сумма чисел в этих двух клетках?

Решение. Ответ: 20. Оценка совпадает с оценкой в задаче 7.5. Один из возможных примеров показан ниже.

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	10	12	13	14	15	16	17	18	19
7	8	10	12	13	14	15	16	17	18
6	7	8	10	12	13	14	15	16	17
5	6	7	8	10	12	13	14	15	16
4	5	6	7	8	10	12	13	14	15
3	4	5	6	7	8	10	12	13	14
2	3	4	5	6	7	8	10	12	13
1	2	3	4	5	6	7	8	10	12
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11