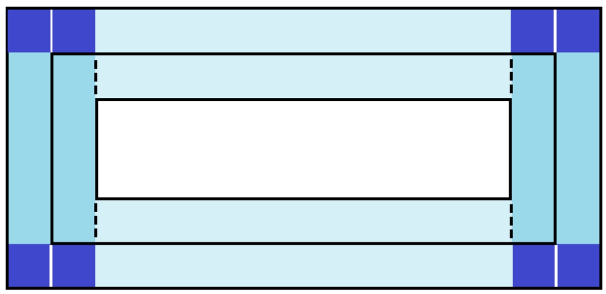
Решения задач для 8 класса

1. Пруд имеет форму прямоугольника. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 20,2% , а за вторые — на 18,6% от первоначальной площади. На какой день пруд полностью замёрзнет?

   Решение. *Первый способ.* Пусть стороны пруда равны a и b метрам, тогда
   $(a-20)(b-20) = (1-0{,}202)ab$, $(a-40)(b-40) = (1-0{,}388)ab$,
   откуда $20(a+b) - 400 = 0{,}202ab$, $40(a+b) - 1600 = 0{,}388ab$,
   то есть $800 = 0{,}016ab$, $ab = 5000$ и далее $a+b = 525$. Получается, что стороны равны 400 и 125 метрам.
   Ответ: на седьмой день.

   Второй способ. Заметим, что каждый день замерзает на 800 м^2 меньше, чем в предыдущий день. Это видно по рисунку, где показано, что «внешняя рамка» состоит из кусков, равных соответствующим кускам «внутренней рамки», и ещё восьми квадратов 10×10 м. Значит, процентная величина замёрзшей части также уменьшается каждый день одинаково. То есть в первый день замёрзло 20,2% площади, во второй 18,6%, в третий 17,0% и так далее. Заметим, что первые шесть членов этой прогрессии имеют сумму, меньшую 100%, а первые семь членов — уже больше 100%. Значит, пруд замёрзнет на седьмой день.

2. См. задания для 7 класса, задача 3.

3. В ромбе $ABCD$ точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Точка P такова, что $PA = PF$, $PE = PC$. Докажите, что точка P лежит на прямой BD.

   Решение. Заметим, что точка P лежит на пересечении серединных перпендикуляров к AF и EC. Рассмотрим точку Q, симметричную P относительно прямой BD. Она обладает теми же свойствами, что и точка P, то есть $QA = QF$, $QE = QC$. Однако это означает, что и точка Q лежит на пересечении тех же серединных перпендикуляров, то есть совпадает с P. Значит, P лежит на BD.

4. См. задания для 7 класса, задача 5.

5. Петя и Вася играют в игру. У них есть полоска из 10 клеток. Каждым ходом игрок вписывает любую цифру в любую свободную клетку. Однако ходят они не по очереди. Сначала Петя делает столько ходов, сколько захочет (но меньше 10); потом он просит Васю сделать один ход; после этого Петя делает все оставшиеся ходы. Петя выиграет, если результирующее число окажется точным квадратом; в противном случае выигрывает Вася. При этом они считают, что число может начинаться с одного или нескольких нулей. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Решение. Выигрышная стратегия есть у Пети. Например, такая: он пишет в двух последних клетках 04. Заметим, что если число кончается на 02 или 52, то его квадрат кончается на 04. Докажем, для любого Васиного хода Петя сумеет найти точный квадрат.

Пусть Вася сходил в разряд сотен. Рассмотрим квадраты чисел 2, 52, 102, 152, 202, 252, 302, 352, 402, 452. Найдём разность между двумя соседними квадратами:
$(50a+2)^2 = 2500a^2 + 200a + 4$,
$(50a+52)^2 = 2500a^2 + 5200a + 2704$,
откуда $(50a+52)^2 - (50a+2)^2 = 5000a + 2700 \equiv 700 \mod 1000$.
Значит, цифра сотен каждого следующего из этих чисел получается из предыдущей увеличением на 7 по модулю 10. Следовательно, цифры сотен во всех этих числах разные (0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3). Поэтому, если Вася сходит в разряд сотен, Петя сумеет дополнить число до квадрата.

Пусть Вася сходил в разряд тысяч, то есть имеем число $******xy04$, где x задано Васей. Рассмотрим ряд чисел $(100a+2)^2 = 10000a + 400a + 4, a = 0, 2, \dots 24$. В этих числах xy образуют арифметическую прогрессию с разностью 4 (04, 08, 12, …, 96), поэтому для каждого x найдётся подходящий y.
Если Вася сходил в десятки тысяч, то рассуждения аналогичные: среди квадратов $1|004|004$, $4|008|004$, $9|012|004$, $16|016|004$, $25|020|004$, …, $576|096|004$ найдутся подходящие.

Если Вася сходил в разряд сотен тысяч или больший, то такие рассуждения приводят к рассмотрению слишком больших чисел, но работает другая идея: попытаемся сделать Васину цифру первой ненулевой цифрой в нашем числе.
Заметим, что квадраты соседних чисел в ряду 2, 52, …, 902, 952 различаются менее чем на 100000 (это следует из формулы квадрата суммы), а $952^2 > 900000$, поэтому цифра сотен тысяч пробегает в них все значения от 0 до 9.
В ряду 2, 52, …, 2902, 2952, 3002 квадраты соседних чисел различаются менее чем на миллион, а последний превышает 9 миллионов; значит, цифра миллионов пробегает все значения от 0 до 9.
Три старших разряда рассмотрим одновременно. В ряду 2, 52, …, 99902, 99952 квадраты соседних чисел различаются менее чем на 10 миллионов, а в числе $99952^2 = 9990402304$ во всех трёх старших разрядах стоят девятки. Значит, каждый из трёх старших разрядов пробегает все значения от 0 до 9.