

## Решения задач для 6 класса

1. В каждую клетку таблицы  $100 \times 100$  записали натуральное число. Оказалось, что каждое число либо больше всех своих соседей, либо меньше всех соседей. (Два числа называются соседями, если они стоят в клетках с общей стороной.) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех чисел?

**Решение.** Разобьём доску на доминошки. В каждой доминошке числа различны, то есть их сумма не меньше  $1 + 2 = 3$ . Тогда общая сумма чисел на доске не меньше 15 000. Эта оценка достижима, если чередовать единицы и двойки в шахматном порядке.

2. На доске записано натуральное число. Каждую минуту с ним делают следующую операцию: если в нём есть две одинаковых цифры, то стирают любую из них; если же все цифры различны, то стирают всё число и вместо него пишут втрое большее число. Например, из числа 57 можно за две минуты получить  $57 \rightarrow 171 \rightarrow 71$  или  $57 \rightarrow 171 \rightarrow 17$ . Мария написала двузначное число и через несколько минут снова получила его же. Приведите пример, как она могла это сделать.

**Решение.**  $25 \rightarrow 75 \rightarrow 225 \rightarrow 25$  или  $75 \rightarrow 225 \rightarrow 25 \rightarrow 75$ .

3. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 35%. На какой день пруд полностью замёрзнет?

**Решение.** Заметим, что чем больше сторона пруда, тем меньший процент замёрзнет в первый день. Если сторона пруда равна 100 м, то в первые сутки день замёрзнет 36%, а если сторона составляет 120 м, то в первые сутки замёрзнет  $1 - \frac{100^2}{120^2} = 11/36 < 1/3$  площади пруда. Значит, сторона пруда составляет от 100 до 120 метров. Значит, он замёрзнет на шестой день.

4. См. задания для 5 класса, задача 4.

5. В 100 пакетах лежат 2018 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Докажите, что в каком-то пакете есть пакет с пакетом внутри.

**Решение.** Оценим суммарное количество вхождений всех конфет во все пакеты. Каждый из 100 пакетов имеет разное количество вхождений, поэтому их не менее чем  $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ . Значит, на какую-то конфету приходится хотя бы три вхождения, то есть она лежит хотя бы в трёх пакетах. Это и значит, что какой-то пакет содержит пакет с пакетом.