Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2017–2018 учебный год. Заключительный этап

Решения задач для 5 класса

1. Может ли двузначное число делиться на пять других двузначных чисел?

   Решение. Да: например, 84 кратно 12, 14, 21, 28, 42. Другие примеры — 60, 90 и 96.

2. Пруд имеет форму квадрата. В первые морозные сутки льдом покрылась вся часть пруда, от которой до ближайшей точки берега не более 10 метров, во второй — не более 20 м, в третий — не более 30 м и т. д. За первые сутки площадь открытой воды уменьшилась на 19%. Через какое время пруд полностью замёрзнет?

   Решение. Нетрудно понять, что подходит пруд 200×200, для которого ответ — через 10 дней (т. к. каждый день сторона уменьшается на 20 метров). Других вариантов нет, поскольку чем больше сторона пруда, тем меньший процент замёрзнет в первый день.

   Более строго: пусть сторона пруда x метров, тогда изначальная площадь x^2 м^2; тогда после первого дня осталось $0,81x^2 = (0,9x)^2$, то есть сторона пруда после первого дня равна $0,9x$. Значит, за первый день сторона уменьшилась на $0{,}1x$. В то же время она уменьшилась на 20 м, откуда $0{,}1x = 20$, $x = 200$.

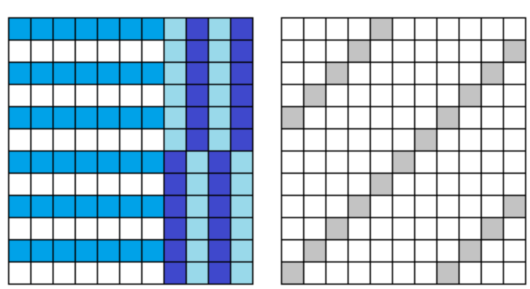
3. Сколько есть способов разрезать квадрат 10×10 по клеткам на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 398? Способы, совмещаемые поворотом или переворотом, считаются различными.

   Решение. 180 способов.

   Если разрезать весь квадрат на 100 единичных квадратиков, то сумма периметров будет равна $4 \times 100 = 400$. Значит, нужно уменьшить эту сумму на 2, что достигается сохранением одной внутренней перегородки нетронутой (иными словами, квадрат разрезается на 98 квадратиков и 1 доминошку). Всего внутренних перегородок 180 — по 9 в каждой из 10 строк и по 9 в каждом из 10 столбцов.

4. Прямоугольник 11×12 разрезан на несколько полосок 1×6 и 1×7. Каково минимальное суммарное количество полосок?

   Решение. Ответ: 20. Пример показан на рисунке.
   Оценка: покрасим каждую седьмую диагональ так, чтобы были закрашены 20 клеток (см. рисунок). Каждая полоска содержит не более одной клетки, поэтому полосок не меньше 20.



5. В нескольких пакетах лежат 20 конфет, причём нет двух пакетов с одинаковым числом конфет и нет пустых пакетов. При этом некоторые пакеты могут лежать в других пакетах (тогда считается, что конфета, лежащая во внутреннем пакете, лежит и во внешнем). Но запрещено делать так, чтобы в каком-то пакете лежал пакет с пакетом внутри. Каково максимально возможное количество пакетов?

   Решение. 8. Пример: $((6)(2))$ $((3)(4))$ $((1)4)$ (есть и другие примеры).

   Более 8 пакетов быть не может. Действительно, тогда сумма количеств конфет в пакетах (иначе говоря, число инцидентностей конфет пакетам) не меньше $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Но конфет 20, значит, какая-то из них лежит хотя бы в трёх пакетах, что недопустимо.