

## Решения задач для 11 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 4.
2. См. задания для 9 класса, задача 3.
3. Существует ли пятизвенная неплоская замкнутая ломаная, все звенья которой равны, а каждые два соседних звена перпендикулярны?

**Решение.** Обозначим ломаную  $ABCDE$ . Не умаляя общности, можно считать, что длина каждого звена равна 1. Тогда можно ввести систему координат, в которой три вершины имеют координаты  $A(0, 1, 0)$ ,  $B(0, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 0)$ . Тогда координаты двух других вершин —  $D(1, a, b)$  и  $E(c, 1, d)$ .

Запишем 5 раз теорему Пифагора: три условия вида «длина звена равна 1» и ещё два условия вида «длина отрезка между несоседними вершинами равна  $\sqrt{2}$ », которые следуют из перпендикулярности соседних звеньев. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} CD = 1 \\ DE = 1 \\ EA = 1 \\ CE = \sqrt{2} \\ DA = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (1 - c)^2 + (1 - a)^2 + (b - d)^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ (1 - c)^2 + 1^2 + d^2 = 2 \\ 1^2 + (a - 1)^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = (a - 1)^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = (c - 1)^2 + d^2 = 1 \\ (a - 1)^2 + (c - 1)^2 + (b - d)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c = 1/2 \\ |b| = |d| = \sqrt{3}/2 \\ (b - d)^2 = 1/2. \end{cases}$$

Очевидно, эта система не имеет решений. Значит, такой ломаной не существует.

4. См. задания для 10 класса, задача 5.
5. Сколько существует троек натуральных чисел  $(a, b, c)$ , образующих арифметическую прогрессию ( $a < b < c$ ), для которых числа  $ab + 1$ ,  $bc + 1$  и  $ca + 1$  являются точными квадратами?

**Решение.** Бесконечно много.

Пусть  $(2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3}$  ( $A_n, B_n \in \mathbb{N}$ ). Тогда  $(2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}$  и  $A_n^2 - 3B_n^2 = 1$ . Положим  $a = 2B_n - A_n$ ,  $b = 2B_n$ ,  $c = 2B_n + A_n$ . Тогда  $a, b, c$  образуют арифметическую прогрессию,  $ab + 1 = (A_n - B_n)^2$ ,  $bc + 1 = (A_n + B_n)^2$ ,  $ca + 1 = B_n^2$ .