Решения задач для 10 класса

1. См. задания для 5 класса, задача 5.

2. См. задания для 9 класса, задача 3.

3. См. задания для 9 класса, задача 4.

4. См. задания для 8 класса, задача 5.

5. Пусть все углы треугольника ABC меньше 120° и $AB \neq AC$. Рассмотрим точку T внутри треугольника, для которой $\angle BTC = \angle CTA = \angle ATB = 120^\circ$. Пусть прямая BT пересекает сторону AC в точке E, а прямая CT пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC пересекаются в некоторой точке M, причём $MB : MC = TB : TC$.

   Решение. 1) Допустим, что $EF \parallel BC$. Тогда по теореме Фалеса $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$. Пусть D — точка пересечения прямых AT и BC, тогда $\angle BTD = 180^\circ - 120^\circ = \angle CTD$, то есть TD — биссектриса в $\triangle TBC$. Аналогично TE — биссектриса в $\triangle TCA$, TF — биссектриса в $\triangle TAB$. Как известно, биссектриса делит сторону треугольника пропорционально двум другим сторонам, откуда $\frac{AF}{FB} = \frac{TA}{TB}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{TA}{TC}$. Значит, $TB = TC$, и $\triangle TBC$ — равнобедренный (с основанием BC). Поэтому его биссектриса TD является также медианой и высотой. Значит, AD — медиана и высота $\triangle ABC$. т. е. $AB = AC$ — противоречие.

   2) По теореме Менелая для треугольника ABC и секущей EM, $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$.

   По теореме Чевы, $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$. Значит, $\frac{MB}{MC} = \frac{DB}{DC}$.

   По свойству биссектрисы, $\frac{DB}{DC} = \frac{TB}{TC}$, откуда $\frac{MB}{MC} = \frac{TB}{TC}$.