Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2016/2017 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. При скольких натуральных n выполняется неравенство
$$\sin\frac{10\pi}{n} > \cos\frac{10\pi}{n}?$$

2. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел n^2+3 и $(n+1)^2+3$, где n — натуральное число?

3. Назовём заслуженными числа вида 2^x+3^y , где x и y — натуральные числа или 0. Легко видеть, что числа $5 = 2^1+3^1 = 2^2+3^0$ и $11 = 2^3+3^1 = 2^1+3^2$ — дважды заслуженные (то есть представляются в таком виде двумя способами). А сколько всего существует дважды заслуженных чисел?

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y так, что $AX = BY$. При этом точки A, X, Y и C лежат на одной окружности. B_1 — основание биссектрисы угла B. Докажите, что прямые XB_1 и YC параллельны.

5. Отец хочет отправить сыну 13 одинаковых мячиков. Для этого он купил почтовый ящик, диагонали граней которого равны 4, 6 и 7 дециметрам. Оказалось, что один мяч помещается в этот ящик. Верно ли, что в нём можно уместить все 13 мячей?

6. Составители олимпиады голосованием определяют, какую из задач (А или Б) поместить в вариант. Для этого все составители по очереди (в алфавитном порядке) сообщают, какая из задач им больше нравится. В результате голосования оказалось, что задача А «победила» со счётом 11:5, причём в каждый момент она имела хотя бы вдвое больше голосов, чем задача Б. Сколькими способами могло проходить голосование?

7. Существуют ли такие целые коэффициенты $a \neq 0, b, c, d$, для которых кубический многочлен $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ принимает каждое из значений 1, 2, 3 и 4 при каком-нибудь целом значении x?