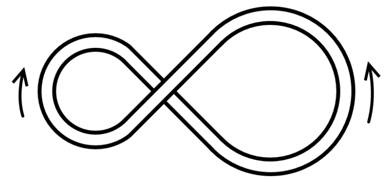
Решения задач для 9 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. Сколько времени Том гнался за Джерри?



Решение. Пока Джерри пробегает малую петлю, Том пробегает большую; пока Джерри пробегает большую петлю, Том пробегает большую и малую вместе. Обозначим длины большой и малой петель буквами L и l соответственно. Тогда получим, что $L : l = (L + l) : L$. Если обозначить $L : l$ через x, то получим: $x = 1 + \frac{1}{x}$, откуда $x^2 = x + 1$. Решая квадратное уравнение (и учитывая, что $x > 0$), получаем, что отношение длин петель равно золотому сечению, то есть числу $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Мы знаем, что за 20 минут Джерри пробежал малую петлю. Значит, большую петлю он пробежал за $20\tau = 10+10\sqrt{5}$ минут, а весь круг — за $20+(10+10\sqrt{5})$ минут. Тут-то Том его и догнал.

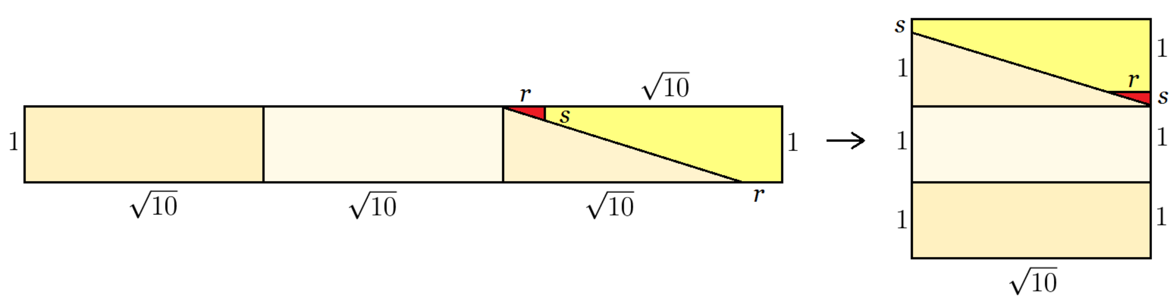
Ответ: $30 + 10\sqrt{5}$ минут.

2. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: $3231 - 1539 - 9756 - 6561 \ldots$ Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

Решение. См. решение задачи 3 для 6 класса.

3. Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 5 частей и составить из них квадрат.

Решение. Разрежем прямоугольник так, как показано на рисунке.



Легко видеть, что $r = 10 - 3\sqrt{10}$. Далее, поскольку малый треугольник подобен большому, то $r : s = \sqrt{10} : 1$, откуда $s = \sqrt{10} - 3$. Поэтому из этих частей можно составить квадрат со стороной $\sqrt{10}$, как показано справа.

4. На плоскости отмечены $2n+1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n-1$ точек и снаружи — тоже $n-1$.

   Решение. Лемма: можно выбрать точки A и B так, что все остальные точки лежат в одной полуплоскости от прямой AB.

   Доказательство леммы. Возьмём прямую, относительно которой вообще все точки лежат в одной полуплоскости. Будем параллельно перемещать её к точкам, пока одна из точек (назовём её A) не попадёт на прямую. Теперь будем вращать эту прямую вокруг точки A до тех пор, пока на неё не попадёт ещё одна точка набора, которую назовём B.

   Для тех, кто знаком с понятием выпуклой оболочки множества точек, заметим, что в качестве A и B подойдут любые две соседние вершины выпуклой оболочки.

   Итак, пусть такие точки A и B выбраны. Для всех остальных точек X углы AXB различны, ведь если для точек X и Y они равны, то точки A, B, X, Y лежат на одной окружности. Упорядочим точки (кроме A и B) по увеличению этого угла. Пусть M — средняя из этих точек. Тогда окружность, содержащая точки A, B, M — искомая.

5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а S — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — N или S? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   Решение. См. решение задачи 5 для 8 класса.