Решения задач для 8 класса

1. Сумма цифр натурального числа равна 2017. При этом, какие бы десять подряд идущих цифр числа мы не рассмотрели, все они различны. Сколько цифр может быть в числе? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.

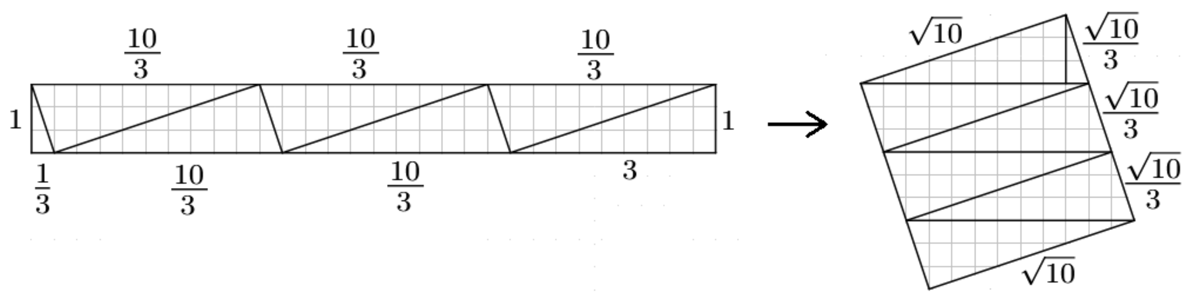
   Решение. Среди каждых десяти подряд идущих цифр все цифры от 0 до 9 встречаются по одному разу, то есть сумма каждых 10 последовательных цифр равна 45.

   Заметим, что $2017 = 44 \cdot 45 + 37$. Значит, число состоит из 44 блоков по 10 цифр и в конце ещё нескольких цифр с суммой 37. Иначе говоря, до 45 блоков (до 450 цифр) не хватает суммы цифр 8, которая может быть набрана одной (8), двумя (35), тремя (521) или четырьмя (5210) цифрами, но не более $(0 + 1 + 2 + 3 + 4 > 8)$.

   Ответ: от 446 до 449.

2. Докажите, что прямоугольник 1×10 можно разрезать на 7 частей и составить из них квадрат.

   Решение. Разрежем прямоугольник, как показано на рисунке.



   По теореме Пифагора найдём длины «косых» отрезков:
   $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.
   Получается, что все получившиеся треугольники подобны (коэффициент подобия «среднего» к «маленькому» равен 3, «большого» к «маленькому» — $\sqrt{10}$. Следовательно, все они прямоугольные. Поэтому можно составить из них фигуру, показанную на рисунке; она окажется прямоугольником, все стороны которого равны $\sqrt{10}$, то есть квадратом.

3. В треугольнике ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180°$.

   Решение. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки.

Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Какое наименьшее количество кошельков ему понадобится? Не забудьте доказать, что найденное вами количество — наименьшее.

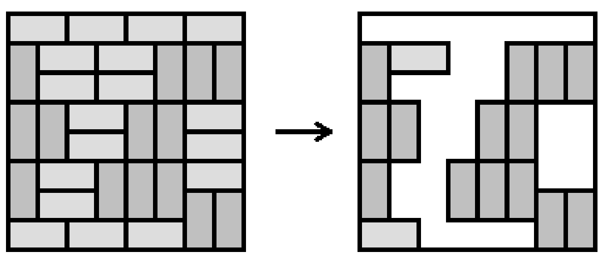
Решение. См. решение задачи 4 для 6 класса.

5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а S — количество способов положить так 16 доминошек. Что больше — N или S? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   Решение. 16 доминошек можно расположить бо́льшим количеством способов, чем 32. Для доказательства рассмотрим определённое соответствие (неоднозначное) между 32-разбиениями и 16-укладками (то есть способами расположить 32 доминошки и способами расположить 16 доминошек).

   Если горизонтальных доминошек 16, то оставим только их. Вертикальные доминошки восстанавливаются по ним однозначно.

   Пусть горизонтальных доминошек больше или меньше 16. Выберем менее популярное направление доминошек и оставим на доске только их. По ним однозначно восстанавливается положение доминошек второго направления. Однако доминошек должно быть 16, а сейчас их меньше. Поэтому добавим к ним часть доминошек другого направления — из числа тех, что были в изначальном 32-разбиении.



   После этого, однако, может оказаться неясным, в каком из направлений лежали остальные 16 доминошек. Значит, каждая из полученных 16-укладок может быть порождена одним или двумя 32-разбиениями. В то же время каждое 32-разбиение по описанному алгоритму порождает много (более 16) 16-укладок в зависимости от того, какие именно доминошки преобладающего направления мы оставляем. Значит, 16-разбиений больше, чем 32-укладок.