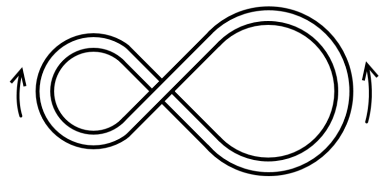
Решения задач для 7 класса

1. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 15 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



Решение. См. решение задачи 2 для 6 класса.

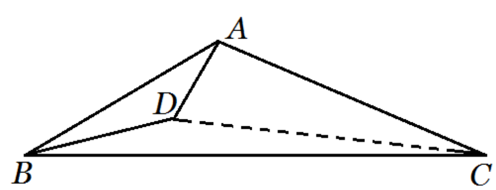
2. Катя решила сосчитать сумму кубов всех натуральных делителей некого натурального числа, и у неё получился результат $MATH$. Но потом она обнаружила, что забыла один из делителей. Прибавив его куб, она получила верный результат — $MASS$. Найдите наименьшее возможное значение числа $MATH$. ($MATH$ и $MASS$ — четырёхзначные числа, в которых каждая цифра заменена буквой, причём одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разные — разными.)

Решение. Ответ: 2017. Исходное натуральное число равно 12; $12^3+6^3+4^3+2^3+1^3 = 2017$; если прибавить 3^3, то получается 2044.

Докажем, что меньших подходящих чисел нет.

1) Для любого числа, меньшего 10, сумма кубов всех делителей, как легко проверить, меньше тысячи.
2) $10^3+5^3+2^3+1^3 = 1134$ и $11^3+1^3 = 1332$ не могут равняться числу $MASS$ (две последние цифры не равны).
3) Для числа 12 $MASS = 2044$; если вычесть из него куб, меньший 27, то результат будет больше 2017, а если больший, то результат уже будет меньше 2000.
4) При $n \geqslant 13$ получаем: $MASS \geqslant n^3 \geqslant 2197$, а значит, $MATH \geqslant 2100$.

3. В треугольнике ABC отмечена точка D такая, что $BD + AC < BC$. Докажите, что $\angle DAC + \angle ADB > 180°$.



Решение.

Поскольку $BD + DC > BC$ (неравенство треугольника), а $BD + AC < BC$ (по условию), то $AC < DC$. Значит, в треугольнике ADC угол D меньше угла A. Но поскольку $BDA + ADC = 360° - BDC > 180°$, то и $ADB + DAC > 180°$.

4. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют восьмизначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее

число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее. Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

Решение. Выигрывает первый игрок. Одна из возможных его стратегий описана ниже.

Разобьём подходящие числа на пары, сопоставив каждому из чисел его же с обратным порядком цифр. Такое сопоставление не подходит для палиндромов (то есть чисел, которые в обоих направлениях читаются одинаково).

Заметим, что палиндромов, начинающихся на каждую цифру, нечётное число, а именно 9^2. Действительно, пусть $\overline{abcddcba}$ — такой палиндром; тогда a фиксировано, а для любых значений b и c существует ровно одно значение d от 1 до 9, при котором $a+b+c+d$ кратно 9 ($\iff$ сумма цифр кратна 9).

Обозначим один из палиндромов (например, 99999999) буквой X, а остальные 80 палиндромов, начинающиеся на 9, произвольным образом разобьём на пары. (То же можно сделать с палиндромами, начинающимися на 1, 2 и т. д., но нам это не нужно.)

Теперь опишем выигрышную стратегию первого игрока. Вначале он называет число X. В ответ на каждое число, названное вторым игроком, называет парное ему число. После каждого хода первого игрока число кончается на девятку. Поскольку числа используются парами, то первый игрок всегда может сделать ответный ход.

5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а F — количество способов поставить на эту доску 16 фишек (в одну клетку нельзя ставить более одной фишки). Что больше — N или F? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

   Решение. Докажем, что расстановок 16 фишек больше, чем разбиений на 32 доминошки. Для этого придумаем правило, которое сопоставляет каждому разбиению на 32 доминошки расстановку 16 фишек, причём так, чтобы разным разбиениям сопоставились разные расстановки. То есть мы должны так закодировать разбиение расстановкой, чтобы оно однозначно восстанавливалось.

   Опишем одно из таких сопоставлений. Выберем менее популярное направление доминошек (вертикальное или горизонтальное). Если в верхней/левой клетке каждой доминошки выбранного направления поставить по фишке, то (зная, какое направление выбрано) легко восстановить положение всех доминошек этого направления. А после этого остальные доминошки тоже однозначно восстанавливаются.

   Здесь есть несколько трудностей.

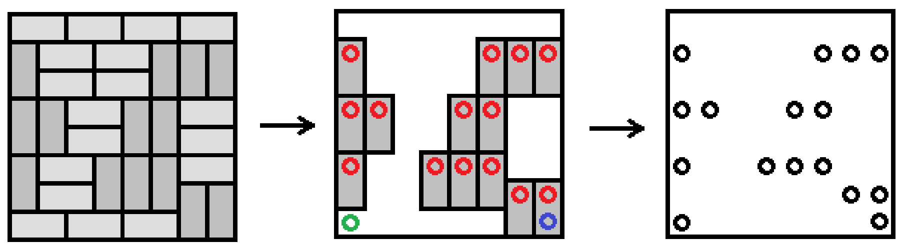
   1) Как по расстановке фишек определить, какое из направлений выбрано? Заметим, что правая нижняя клетка доски в любом случае свободна. Пусть стоящая в ней фишка будет обозначать, что выбранное направление — вертикальное. (Значит,

если доминошек каждого направления по 16, то в качестве «менее популярного» надо выбирать горизонтальное направление, чтобы не тратить 17-ю фишку.)

2) Описанный алгоритм может дать менее 16 фишек, а надо ровно 16. Надо добавить недостающие фишки на свободные места.

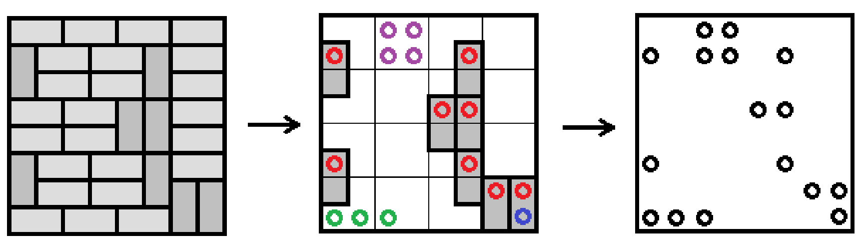
2a) Пусть на доске стоит от 9 до 15 фишек. Пусть, для определённости, выбранное направление доминошек — вертикальное. Тогда клетки нижней строки (кроме самой правой из них) заведомо свободны. Будем размещать в них лишние фишки (вплоть до семи штук). Пример показан на рисунке (синяя фишка указывает на выбранное направление, зелёная — лишняя).

a



2b) Пусть на доске стоит менее 9 фишек. Тогда разобьём левый верхний квадрат 6×6 этой доски на 9 квадратов 2×2. Хотя бы один из них окажется свободен (а если фишек менее 7, то хотя бы три). Займём некоторые свободные квадраты (например, начиная с самого верхнего из самых левых) фишками целиком — так, чтобы на доске стало не менее 9 фишек, после чего выставим оставшиеся фишки как в пункте (а). Заметим, что другие части алгоритма не могут привести к заполнению целого квадрата 2×2 в верхнем левом фрагменте 6×6, поэтому при дешифровке такие квадраты однозначно идентифицируются как «склады лишних фишек». Пример показан на рисунке ниже (фиолетовые и зелёные фишки — лишние).

b



3) Существуют способы расставить 16 фишек, которые не могут получиться в результате работы нашего алгоритма. Например, это способы, когда есть заполненные «склады фишек», описанные в пункте 2b, но верхний левый квадрат 2×2 пуст.

Итак, мы описали алгоритм кодирования, допускающий однозначную дешифровку, поэтому $N \leqslant F$. Поскольку существуют расстановки 16 фишек, не порождаемые этим алгоритмом, то $N < F$.

Замечание. Возможен также подход, описанный в решении задачи 5 для 8-9 классов: сделать соответствие более простым и не делать его взаимно однозначным, но доказать, что каждому разбиению соответствует больше расстановок, чем каждой расстановке — разбиений.