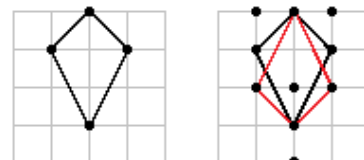


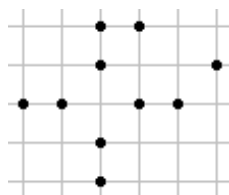
Решения задач для 5 класса

1. Паша рисует точки на пересечении линий клетчатой бумаги.

Ему нравится, если четыре точки образуют фигуру «воздушный змей», показанную справа (змея должен быть именно такой формы и размера, но может быть повёрнут). Например, 10 точек, показанные на втором рисунке, образуют всего два змея. Нарисуйте 10 точек так, чтобы они образовали целых пять змеев.

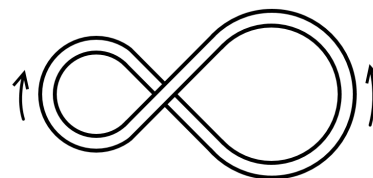


Решение. Например, так.



2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок).

Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. Ещё через 10 минут Том вернулся в место старта. Через какое время после начала бега Том догонит Джерри?



Решение. За первые 20 минут Том пробегает большую петлю, а Джерри малую. За следующие 10 минут Том пробегает малую петлю. Значит, скорость Тома вдвое больше скорости Джерри, а большая петля вдвое длиннее малой.

Обозначим длину малой петли через m , тогда длина большой равна $2m$. Изначально Джерри опережает Тома на длину большой петли, то есть на $2m$. За время, пока Джерри пробегает $2m$, Том пробежит $4m$ и догонит его. Заметим, что Джерри пробегает m за 20 минут, значит, $2m$ он пробежит за 40 минут.

Ответ: через 40 минут.

3. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют трёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 351 – 189 – 936 – 621... Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

Решение. Выигрывает первый игрок. Одна из возможных стратегий такова. Он называет число 999, а потом в ответ на любое число \overline{ABC} , названное вторым, называет число \overline{CBA} (то же самое число «задом наперёд»). Заметим, что после этого второму опять придётся назвать число, которое начинается на 9. Первый игрок всегда может сделать ход, ведь подходящих чисел вида $\overline{9B9}$ (кроме 999) больше нет.

Замечание. В качестве начального числа первый игрок может использовать любой другой палиндром (то есть число, читаемое в обоих направлениях одинаково): 171, 252 и т.д.

4. У Флинта есть пять матросов и 60 золотых монет. Он хочет разложить их по кошелькам, а потом раздать кошельки матросам так, чтобы каждому досталось поровну монет. Но он не знает, сколько матросов останутся в живых к моменту делёжки. Поэтому он хочет разложить монеты так, чтобы их можно было поровну раздать и двоим, и троим, и четверым, и пятерым. Хватит ли ему для этого девяти кошельков?

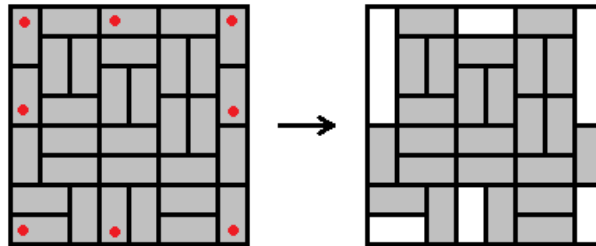
Решение. Да. Например, при таком количестве монет в кошельках: 12, 12, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 3.

Заметим, что меньшего количества кошельков недостаточно (см. решение задачи 4 для 6 класса).

5. На доске 8×8 клеток можно расположить несколько доминошек (то есть прямоугольников 2×1), не накладывающихся друг на друга. Пусть N — количество способов положить так 32 доминошки, а T — количество способов положить так 24 доминошки. Что больше — N или T ? Способы, которые получаются друг из друга поворотом или отражением доски, считаются различными.

Решение. Способов расположить 24 доминошки больше. Докажем это.

Рассмотрим какое-нибудь разбиение доски на 32 доминошки. Уберём четыре доминошки, содержащие угловые клетки. Кроме этого, с каждой стороны доски уберём какую-нибудь доминошку, содержащую одну из средних клеток этой стороны. (Пример показан на рисунке.)



Заметим, что после убирания этих 8 доминошек по оставшимся 24 доминошкам можно однозначно восстановить, как лежали 8 убранных. (Действительно, рядом с каждым углом есть только одна свободная клетка, что позволяет восстановить положение угловых доминошек. После этого восстанавливаются и четыре других доминошки.)

Значит, каждой расстановке-32 (то есть расстановке 32 доминошек) можно сопоставить свою расстановку-24. Очевидно, что существуют и такие расстановки-24, кото-

рым мы не сопоставили никакую расстановку-32 (например, такие, где заняты угловые клетки). Значит, расстановок-24 больше.