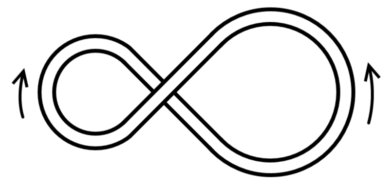
Решения задач для 11 класса

1. Двое играют в такую игру. Они по очереди называют четырёхзначные числа, у которых нет нулей в записи, а сумма цифр делится на 9. При этом каждое следующее число должно начинаться с той же цифры, на которую кончается предыдущее, например: 3231 – 1539 – 9756 – 6561 . . . Повторять числа нельзя. Тот, кто не может назвать очередное число, проигрывает. Кто из игроков — начинающий или его соперник — может выиграть независимо от игры другого?

   Решение. См. решение задачи 3 для 6 класса.

2. Том и Джерри бегают друг за другом по трассе в виде восьмёрки (см. рисунок). Они бегут в одном направлении и с постоянными скоростями. В начальный момент Джерри был точно над Томом. Через 20 минут Том оказался точно над Джерри, причём ни один из них не успел пробежать полный круг. В момент, когда Джерри пробежал ровно один круг с начала пути, Том наконец догнал его. После этого они продолжили бежать в том же направлении. Окажется ли ещё когда-нибудь один из них над другим? Тома и Джерри считать точками, трассу — линией.



   Решение. Пока Джерри пробегает малую петлю, Том пробегает большую; пока Джерри пробегает большую петлю, Том пробегает большую и малую вместе. Обозначим длины большой и малой петель буквами L и l соответственно. Тогда получим, что $L : l = (L + l) : L$. Если обозначить $L : l$ через x, то получим: $x = 1 + \frac{1}{x}$, откуда $x^2 = x + 1$. Решая квадратное уравнение (и учитывая, что $x > 0$), получаем, что отношение длин петель равно золотому сечению, то есть числу $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поскольку за одно и то же время Джерри пробегает малую петлю, а Том — большую, то отношение их скоростей тоже равно τ.

   Заметим, что отношение меньшей петли к большей равно $\frac{1}{\tau} = \tau - 1$, а отношение меньшей петли к полному кругу — $\frac{1}{\tau+1} = 2-\tau$ (использованные здесь свойства золотого сечения легко доказать).

   Пусть теперь Том и Джерри повторно оказались друг над другом. Это значит, с момента встречи один пробежал целое число (k) кругов, другой — целое число (m) кругов плюс малую петлю, то есть $m + 2 - \tau$ кругов. Отношение пройденных расстояний должно равняться отношению скоростей, то есть золотому сечению. То есть либо $k\tau = m + 2 - \tau$, либо $\frac{k}{\tau} = m + 2 - \tau$. Первое приводит к равенству $\tau(k + 1) = m + 2$, второе — учитывая, что $\tau^2 = \tau + 1$ — к равенству $k + 1 = (m + 1)\tau$. И то и другое невозможно, поскольку $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ и τ иррационально.

   Ответ: не окажется.

3. На плоскости отмечены $2n + 1$ точек, причём никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что существует окружность, проходящая через три из этих точек, внутри которой лежит $n - 1$ точек и снаружи — тоже $n - 1$.

   Решение. См. решение задачи 4 для 9 класса.

4. Угол между диагоналями трапеции равен $60°$. Докажите, что сумма длин боковых сторон не меньше, чем длина большего основания.

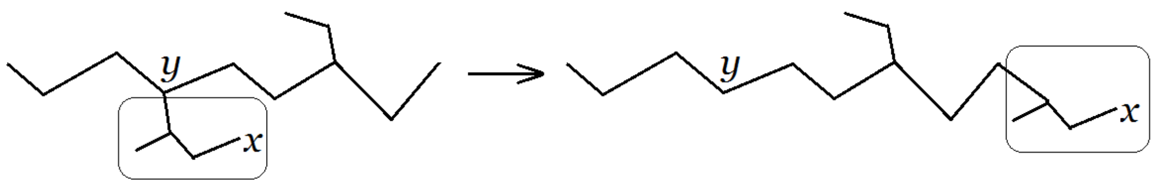
   Решение. См. решение задачи 5 для 10 класса.

5. В стране 100 городов, между ними действует несколько беспосадочных авиалиний так, что от любого города до любого можно добраться, возможно, с пересадками. Для каждой пары городов вычислили наименьшее количество перелётов, необходимых чтобы

добраться от одного до другого. Назовём транспортной затруднённостью страны сумму квадратов этих 4950 чисел. Какое наибольшее значение может принимать транспортная затрудённость? Ответ должен быть дан в виде числа (в десятичной системе счисления).

Решение. Сначала докажем, что транспортная затруднённость наибольшая в случае, когда города связаны «по цепочке».

Действительно, можно считать граф деревом (иначе выкинем часть рёбер так, чтобы осталось дерево — затруднённость увеличится). Выберем в дереве самый длинный путь. Допустим, что есть вершины, не входящие в этот путь. Тогда среди них найдётся висячая вершина x (то есть вершина, в которую ведёт только одно ребро). Пусть y — ближайшая к x вершина самого длинного пути. Перенесём всю «ветку», отходящую от y и содержащую x, в конец самого длинного пути, более удалённый от y. Заметим, что в результате попарные расстояния между вершинами в пределах «ветки» не изменились, расстояния между вершинами вне ветки — тоже. При этом легко видеть, что для каждой вершины ветки сумма квадратов расстояний до всех остальных вершин возросла. Действительно, если k — расстояние от некой вершины z ветки до y, то набор расстояний от z до вершин вне ветки (включая y) был k, $k+1$, $k+1$, $k+2$, $k+2$, $\ldots, k+s$, $k+s$, $k+s+1$, $k+s+2$, $\ldots, k+s+t$, а стал k, $k+1$, $k+2$, $k+3, \ldots$.



Такими «перевешиваниями» можно привести граф к виду цепочки, причём затруднённость всё время будет возрастать; значит, для цепочки она максимальна.

Теперь посчитаем затруднённость для «цепочки». Задача сводится к нахождению суммы $99 \cdot 1^2 + 98 \cdot 2^2 + 97 \cdot 3^2 + \ldots + 1 \cdot 99^2$.

Обозначим $S_n^2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$, $S_n^3 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$. Как известно, $S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $S_n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (это можно доказать по индукции).

Заметим, что искомая сумма равна

$$100 \cdot (1^2 + 2^2 + ... + 99^2) - (1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + 99 \cdot 99^2) = 100S_{99}^2 - S_{99}^3 =$$

$$= 100 \cdot \frac{99 \cdot (99+1) \cdot (2 \cdot 99 + 1)}{6} - \Big(\frac{99 \cdot (99+1)}{2}\Big)^2 = 32835000 - 24502500 = 8332500.$$