

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 8 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Расставьте в клетках квадрата 5×5 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4 и 2015 (повторно их использовать нельзя).
2. В тараканьих бегах участвуют 27 тараканов. В каждом забеге бегут три таракана. Скорости всех тараканов различны и постоянны в течение всех забегов. После каждого забега мы узнаём, в каком порядке его участники пришли к финишу. Мы хотели бы узнать двух самых быстрых тараканов (в правильном порядке). Хватит ли для этого 14 забегов?
3. Найдите хотя бы одно натуральное число, произведение натуральных делителей которого равно 10^{79} .
4. У Васи есть 12 палочек, длина каждой из которых — натуральное число, не превосходящее 56. Докажите, что из каких-то трёх палочек можно сложить треугольник.
5. Натуральное число называется красивым, если оно равно произведению факториалов простых чисел (не обязательно различных). Положительное рациональное число называется практичным, если оно равно отношению двух красивых натуральных чисел. Докажите, что любое положительное рациональное число — практичное.
6. В треугольнике ABC угол B равен 30° , а угол C равен 105° . Точка D — середина стороны BC . Найдите угол BAD .
7. Считается, что ученик A учится лучше ученика B , если в большинстве контрольных работ оценка у ученика A выше, чем у ученика B . В классе провели несколько работ (больше трёх). Может ли по их результатам оказаться, что ученик A учится лучше, чем ученик B , ученик B — лучше, чем ученик C , а ученик C — лучше, чем A ?