

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2015/2016 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

Пожалуйста, не забудьте обосновать ответы.

1. Багз Банни и Кролик Роджер поспорили, кто из них быстрее прыгает. Чтобы выяснить это, они решили провести соревнование: каждый должен прыжками преодолеть 50-метровую дистанцию, затем развернуться и вернуться к месту старта. Известно, что Багз Банни прыгает на 50 см, а Роджер на 60 см, но за то время, за которое Багз делает 6 прыжков, Роджер делает 5. Кто же из кроликов финиширует первым?
2. При каких n можно разрезать квадрат на n подобных прямоугольников, не все из которых равны?
3. Существуют ли такие натуральные числа a и b , что $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + 2015, b + 2016)$?
4. В треугольнике ABC угол B равен 30° , а угол C равен 105° . Точка D — середина стороны BC . Найдите угол BAD .
5. Расставьте в клетках квадрата 10×10 различные натуральные числа так, чтобы их суммы в каждой строке и каждом столбце были равны между собой и (при этом условии) как можно меньшими. На одной из диагоналей уже стоят числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 2015 (повторно их использовать нельзя).
6. Вписанная окружность касается сторон AB , BC и AC треугольника ABC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите неравенство:

$$\frac{AC}{AB_1} + \frac{CB}{CA_1} + \frac{BA}{BC_1} > 4.$$

7. Хорошо известно, что $3^2 + 4^2 = 5^2$. Менее известно, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. А для любого ли натурального k существуют $2k + 1$ последовательных натуральных чисел таких, что сумма квадратов первых $k + 1$ из них равна сумме квадратов последних k ?