Задачи для 9 класса

1. Найдите все такие числа k, для которых
$$(k/2)!\,(k/4) = 2016 + k^2.$$
Знаком $n!$ обозначен факториал числа n, то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

Решение. Заметим, что левая часть имеет смысл только для чётных значений k. Непосредственно убеждаемся, что $k = 2, 4, 6, 8, 10$ не подходят, а $k = 12$ даёт верное равенство.
При каждом дальнейшем увеличении k на 2 выражение $(k/2)!$ увеличивается хотя бы в 7 раз, т. е. левая часть растёт более чем в 7 раз. В то же время правая часть увеличивается менее чем вдвое: $(k+1)^2 - k^2 < 2016 + k^2$ при всех $k \geqslant 12$. Поэтому при $k > 12$ левая часть больше правой.
Ответ: $k = 12$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.
Решение: см. задачу 8.2.

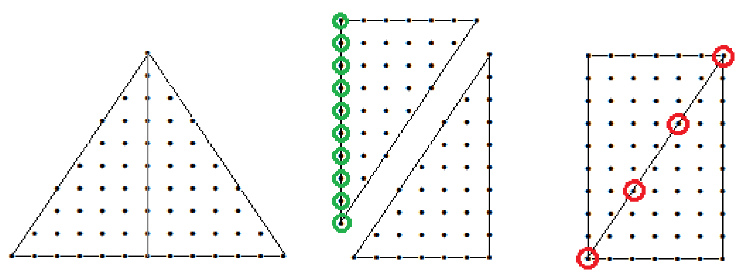
3. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
Решение: см. задачу 6.5.

4. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC: $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.

Решение. Заметим, что $1533^2 - 1008^2 = (1533 - 1008)(1533 + 1008) = 525 \cdot 2541 = 21 \cdot 25 \cdot 7 \cdot 363 = 7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11^2 = (7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)^2 = 1155^2$. Значит, высота треугольника равна 1155.

Видим, что НОД чисел 1155 и 1008 равен 21. Это значит, что на боковой стороне имеется 22 узла (включая вершины), которые делят её на 21 равную часть.

Дальнейшая часть решения основана на том, что треугольник постепенно трансформируется в прямоугольник 1008×1155, количество узлов в котором легко посчитать. Схематично этот процесс представлен на рисунке. Обозначим искомое количество узлов в треугольнике через T.

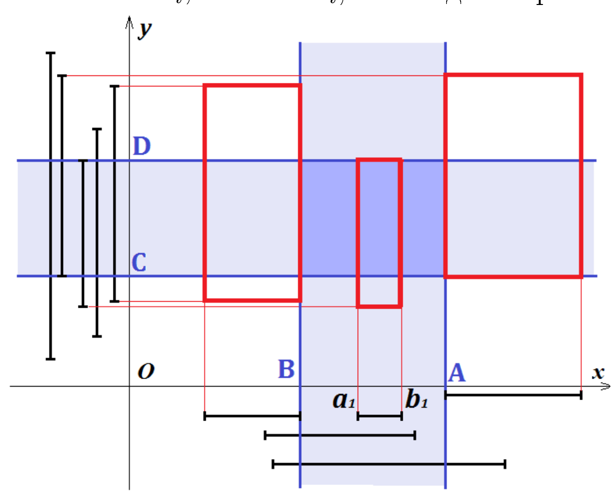


1) Разрежем треугольник по оси симметрии на две половины (два прямоугольных треугольника) и рассмотрим каждую из них как отдельную фигуру. Сумма количеств узлов в этих половинах на 1156 больше, чем в исходном треугольнике, то есть $T + 1156$, поскольку узлы, находившиеся на оси симметрии, продублировались.
2) Соединим эти две половины в прямоугольник 1008×1155. Внутренние части половин полностью покрывают прямоугольник, при этом 22 узла, находящиеся в этих половинах, совпали. Поэтому количество узлов в прямоугольнике на 22 меньше, чем в двух половинах, то есть $T + 1156 - 22$.
В то же время это количество, очевидно, равно $1009 \cdot 1156$. Значит, $T + 1156 - 22 = 1009 \cdot 1156$;
$T = 1008 \cdot 1156 + 22 = 1156000 + 9248 + 22 = 1165270$.

Ответ: 1165270 узлов.

5. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдётся прямоугольник, пересекающийся со всеми.

Решение. Спроецируем все прямоугольники на ось x, в результате каждый из них перейдёт в отрезок $[a_i, b_i]$ $(i = 1, \ldots, 100)$.
Обозначим через A наибольшую координату начала, а через B — наименьшую координату конца (то есть $A = \max a_i$, $B = \min b_i$). Для дальнейшего решения несущественно, какое из чисел A и B больше; возможно и равенство. Независимо от этого отрезок, ограниченный числами A и B, будем обозначать AB (в случае $A = B$ он вырождается в точку).
Каждый отрезок $[a_i, b_i]$ пересекается (хотя бы по одной точке) с отрезком AB. Действительно, если для какого-то отрезка $[a, b]$ это не так, то он расположен либо целиком слева, либо целиком справа от AB. В первом случае $b < B$, но это противоречит определению числа B как наименьшего из b_i; во втором случае $a > A$, но и это аналогичным образом невозможно.
Точно так же можно спроецировать прямоугольники на вертикальную ось, получив отрезки $[c_i, d_i]$. Мы обнаружим, что если $C = \max c_i$, $D = \min d_i$, то каждый отрезок пересекается с отрезком CD.



Обозначим буквой R прямоугольник с вершинами в точках (A, C), (A, D), (B, C), (B, D). Возвращаясь от проекций к прямоугольникам, мы получаем, что каждый прямоугольник из условия пересекается с прямоугольником R.

Докажем теперь, что хотя бы один из ста прямоугольников исходного набора содержит в себе все четыре вершины прямоугольника R (тогда получится, что он содержит весь R, а значит, пересекается со всеми прямоугольниками набора). Условимся говорить, что у каждого прямоугольника есть левая, правая, нижняя и верхняя координаты (это числа a_i, b_i, c_i и d_i из предыдущего рассуждения).
Хотя бы 90 прямоугольников пересекаются с тем прямоугольником, левая координата которого равна B (такой прямоугольник есть, см. определение числа B), значит, есть не более 9 прямоугольников, левая координата которых больше B.
Аналогично, есть не более 9 прямоугольников, правая координата которых меньше A; не более 9 прямоугольников, нижняя координата которых больше D; и не более 9 прямоугольников, верхняя координата которых меньше C.
Значит, у остальных прямоугольников (а их не меньше чем $100 - 9 \cdot 4$, т. е. не меньше 64) правая координата не меньше A, левая не больше B, верхняя не меньше C, а нижняя не больше D.
Возьмём любой из таких прямоугольников. Мы доказали, что его правая координата не меньше A; однако его левая координата не больше A (по определению числа A). Значит, этот прямоугольник пересекает прямую $x = A$. Аналогично доказывается, что он пересекает прямые $x = B$, $y = C$, $y = D$. Очевидно, из этого следует, что он содержит все четыре точки $(A, C), (A, D), (B, C), (B, D)$. Требуемый прямоугольник найден.