Задачи для 8 класса

1. Существуют ли три таких различных цифры A, B, C, что $\overline{ABC}$, $\overline{CBA}$, $\overline{CAB}$ — квадраты натуральных чисел? (Черта над цифрами означает число, составленное из этих цифр в указанном порядке.)

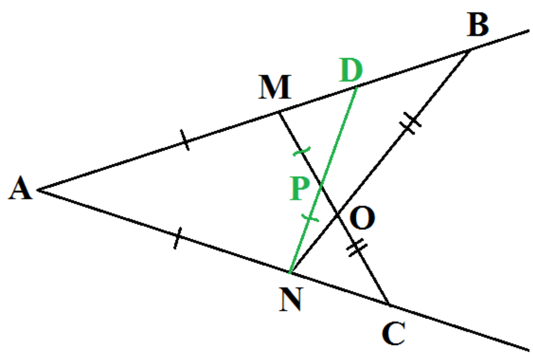
   Решение. Да. Это цифры $A = 9, B = 6, C = 1$. D этом случае $961 = 31^2, 169 = 13^2, 196 = 14^2$.

2. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Какое максимальное количество равновесных клеток может оказаться на доске? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

   Решение. Клетки, лежащие на границе доски, но не в углу, не могут оказаться равновесными, поскольку у них нечётное количество соседей (три). Таких клеток $4 \cdot 98 = 392$.
   Все остальные клетки можно сделать равновесными, например, при полосатой раскраске (первая строка синяя, вторая белая, третья синяя и т.д.). Количество этих клеток $10000 - 392 = 9608$.
   Ответ: 9608.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O, причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

   Решение. Предположим, что это неверно, например, что $AB > AC$. Отметим на стороне AB такую точку D, что $AD = AC$. В силу симметрии, отрезки MC и ND пересекаются в некой точке P, причём $PM = PN$. Из симметрии также следует, что $CM = DN$.



Итак, $NP = PM$;
$NO - OP < PM$ (т.к. $NO - OP < NP$ из неравенства треугольника);
$NO < OP + PM$, откуда $NO < OM$;
поскольку $OB = OC$, то $NO + OB < OM + OC$;
иначе говоря, $NB < MC$,
или, что то же самое, $NB < ND$.

Однако $\angle BDN$ тупой (поскольку он больше угла BMN, а он, в свою очередь, является тупым как смежный с острым углом при основании равнобедренного треугольника AMN). Сторона $\triangle BDN$, лежащая напротив тупого угла, не может быть короче другой его стороны, то есть неравенство $NB < ND$ невозможно. Противоречие.

4. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если каждый прямоугольник содержит больше 2010, но меньше 2020 клеток.

   Решение. Общая часть этих двух прямоугольников (если она непуста) является прямоугольником. Определим максимально возможные длины его сторон.
   Вертикальная сторона первого прямоугольника короче горизонтальной, поэтому она меньше $\sqrt{2020}$, то есть меньше 45; то же верно и для горизонтальной стороны второго прямоугольника. В то же время стороны пересечения не могут превышать соответствующих сторон исходных прямоугольников (но, очевидно, могут быть им равны).
   Найдём наибольшую возможную длину каждой из этих сторон. Для этого найдём наибольшее из чисел, меньших 45, которое является делителем какого-нибудь числа от 2011 до 2019 включительно. Можно заметить, что ни одно из чисел $2011, \ldots, 2019$ не делится ни на 44 (т. к. $2024 = 45^2 - 1^2 = 44 \cdot 46$ делится на 44), ни на 43 (т. к. $2021 = 45^2 - 2^2 = 43 \cdot 48$ делится на 43). Зато число 2016 делится на 42 (т. к. $2024 = 45^2 - 3^2 = 42 \cdot 48$), поэтому максимально возможная длина каждой из сторон пересечения — 42. Значит, максимальная его площадь — $42^2 = 1764$. Это значение достигается для прямоугольников 48×42 и 42×48, совмещённых, например, левыми верхними клетками.

   Ответ: 1764.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
   Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры). А числа 1123, 2231, 3311 не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
   Сколько всего сетов существует в игре?
   (Перестановка чисел не приводит к образованию нового сета: 1232, 2213, 3221 и 2213, 1232, 3221 — один и тот же сет.)

   Решение. Заметим, что для любых двух чисел существует ровно один сет, в котором они встречаются. Действительно, третье число этого сета строится так: в тех разрядах, где первые два числа совпадают, третье число имеет такую же цифру; в разряде, где первые два числа различаются, третье число получает оставшуюся цифру. Например, для чисел 1231 и 1223 третьим в сете будет 1212.

   Назовём «упорядоченным сетом» сет из трёх четырёхзначных чисел с учётом их порядка. На первое место в такой последовательности можно поставить любое из 81 чисел, на второе — любое из 80 оставшихся; на третье — ровно одно (по описанному выше принципу). Всего упорядоченных сетов $81 \cdot 80 \cdot 1$. Заметим, что каждый неупорядоченный сет $\{a, b, c\}$ соответствует шести упорядоченным: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Поэтому упорядоченных сетов в 6 раз меньше.

   Ответ: $81 \cdot 80/6 = 1080$.