Задачи для 7 класса

1. Придумайте пять различных натуральных чисел, произведение которых равно 1000.
Решение: см. задачу 5.1.

2. На тетрадном листе обведены два прямоугольника. У первого прямоугольника вертикальная сторона короче горизонтальной, а у второго — наоборот. Найдите максимально возможную площадь их общей части, если первый прямоугольник содержит 2015 клеток, а второй — 2016.

Решение. Общая часть этих двух прямоугольников (если она непуста) является прямоугольником. Определим максимально возможные длины его сторон.
Вертикальная сторона первого прямоугольника короче горизонтальной, поэтому она меньше $\sqrt{2015}$, то есть меньше 45; то же верно и для горизонтальной стороны второго прямоугольника. В то же время стороны пересечения не могут превышать соответствующих сторон исходных прямоугольников (но, очевидно, могут быть им равны).
Заметим, что $2015 = 5 \cdot 403 = 5 \cdot 13 \cdot 31$; $2016 = 4 \cdot 504 = 4 \cdot 4 \cdot 126 = 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 9 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
С учётом этого вертикальная сторона не больше 31, а горизонтальная — не больше 42 (это самые большие делители чисел 2015 и 2016, которые меньше 45). Значит, стороны пересечения не превосходят 31 и 42, а площадь не больше $31 \cdot 42 = 1302$. Случай равенства, очевидно, достигается для прямоугольников 65×31 и 42×48, совмещённых, например, левыми верхними клетками.

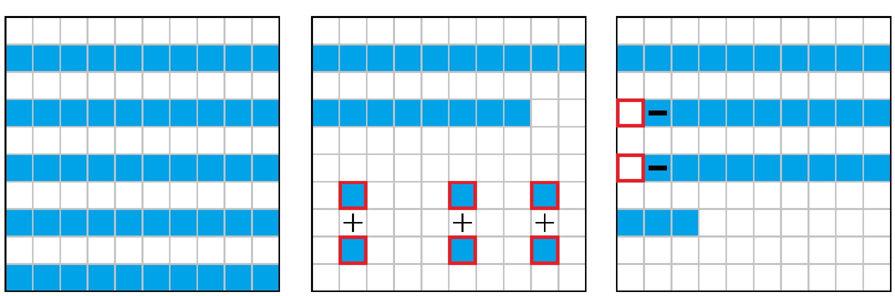
Ответ: 1302.

3. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
Решение: см. задачу 6.4.

4. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.
Решение: см. задачу 6.5.

5. Каждая клетка доски 100×100 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Для каких n можно раскрасить доску так, чтобы на ней было ровно n равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

Решение. Заметим, что минимальное количество равновесных клеток — 0 (например, если все клетки белые).
Найдём максимальное количество равновесных клеток. Клетки, лежащие на границе доски, но не в углу, не могут оказаться равновесными, поскольку у них нечётное количество соседей (три). Таких клеток $4 \cdot 98 = 392$. Все остальные клетки можно сделать равновесными, например, при полосатой раскраске (см. рисунок a). Количество этих клеток $10000 - 392 = 9608$.



a b c

Будем называть число r достижимым, если существует раскраска с r равновесными клетками. Мы знаем, что числа 0 и 9608 достижимы. Докажем, что все числа от 0 до 9608 тоже достижимы.

Для этого возьмём белую доску и будем постепенно закрашивать её в полосатую раскраску. Поскольку закраска одной клетки влияет только на равновесность её соседей, то с каждой новой закрашенной клеткой число равновесных клеток меняется не более чем на 4. В начале процесса оно равно 0, а в конце — 9608. Значит, разность между двумя соседними достижимыми числами в промежутке от 0 до 9608 не превосходит 4.

Осталось научиться изменять количество равновесных клеток на 1, 2 или 3. Для этого докажем два вспомогательных утверждения.
1) Если число $r \leqslant 5000$ достижимо, то числа $r+1$, $r+2$, $r+3$ достижимы. Действительно, в этом случае на доске много свободного (белого) места. Можно поместить вдалеке от остальных синих клеток две синих клетки, между которыми ровно одна белая (см. рисунок b) — это увеличит количество равновесных клеток на 1; так можно сделать даже трижды.
2) Если число $r \geqslant 5000$ достижимо, то числа $r-1$, $r-2$, $r-3$ достижимы. Действительно, в этом случае на доске много синих полос. Можно перекрасить самую левую клетку любой из этих полос в белый цвет (см. рисунок c), и соседняя с ней клетка перестанет быть равновесной. Так можно сделать даже трижды.
Из утверждения 1 следует, что все числа от 0 до 5000, достижимы; из утверждения 2 следует, что достижимы все числа от 5000 до 9608.

Ответ: от 0 до 9608 включительно.