

## Задачи для 6 класса

1. Каждая клетка доски  $10 \times 10$  покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку радостной, если ровно две соседних с ней клетки синие. Закрасьте доску так, чтобы все клетки были радостными. (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

**Решение:** см. задачу 5.2.

2. Вот задача из задачника С. А. Рачинского (конец XIX века): «Сколько досок длиной в 6 аршин, шириною в 6 вершков нужно, чтобы замостить пол в квадратной комнате, коей сторона — 12

аршин?» Ответ к задаче: 64 доски. Установите по этим данным, сколько вершков в аршине.

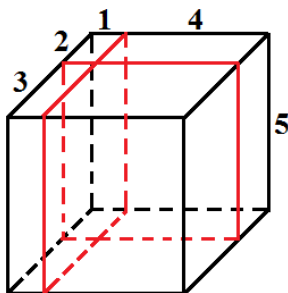
**Решение:** см. задачу 5.3.

3. У Никиты есть волшебная банка. Если в банку положить  $n$  конфет и закрыть на час, то количество лежащих в ней конфет увеличится на сумму цифр числа  $n$ . Например, если было 137 конфет, то станет  $137 + 1 + 3 + 7 = 148$ . Какое максимальное количество конфет Никита может получить за 20 часов 16 минут, если вначале у него одна конфета?

**Решение:** см. задачу 5.5.

4. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.

**Решение.** Куб можно разрезать на четыре типичных параллелепипеда. Например, куб  $5 \times 5 \times 5$  разрезается на параллелепипеды  $5 \times 3 \times 1$ ,  $5 \times 3 \times 4$ ,  $5 \times 2 \times 1$ ,  $5 \times 2 \times 4$ .



На меньшее число типичных параллелепипедов разрезать куб невозможно. Действительно, у куба 8 вершин; если он разрезан на три или менее параллелепипедов, то какой-то из них содержит хотя бы три вершины куба.

Если все эти три вершины расположены на одной грани куба (например, на верхней), то параллелепипед содержит всю верхнюю грань куба; значит, у него есть два одинаковых измерения. Пусть две вершины расположены на верхней грани куба и одна — на нижней. Тогда параллелепипед содержит хотя бы одно из рёбер верхней грани, а ещё его высота равна высоте куба. Опять имеем два одинаковых измерения.

Ответ: на 4 типичных параллелепипеда.

5. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

**Решение.** Лидии нравятся пятизначные числа, составленные только из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8. Заметим, что все такие числа можно разбить на пары следующим способом: каждую цифру  $a$  заменим на  $9 - a$ , то есть 1 заменяется на 8, 2 на 7, 4 на 5 и наоборот. Например, число 42718 находится в паре с числом 57281. Это разбиение хорошо тем, что сумма цифр в каждой паре равна 45 (потому что сумма двух цифр в каждом разряде равна 9).

Осталось выяснить, сколько всего таких пар. Для этого найдём общее количество чисел. В первом разряде может стоять любая из шести цифр, во втором — тоже любая из шести и т. д. Общее количество чисел равно  $6^5$ . А количество пар —  $6^5/2$ , и сумма цифр в каждой из них — 45. Общая сумма цифр равна  $45 \cdot 6^5/2 = 45 \cdot 7776/2 = 45 \cdot 3888 = 174960$ .

**Другое решение.** Найдём общую сумму цифр, стоящих в старшем разряде всех чисел. Существует  $6^4$  чисел, которые начинаются с единицы, и сумма их первых цифр равна  $1 \cdot 6^4$ . Ещё есть  $6^4$  чисел, начинающихся с двойки, и сумма первых цифр в них равна  $2 \cdot 6^4$ . Аналогично поступаем с числами, начинающимися на 3, 4, 7, 8. Получаем общую сумму цифр в старшем разряде  $(1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8) \cdot 6^4 = 27 \cdot 6^4$ . В каждом из остальных разрядов сумма цифр такая же, поэтому всего имеем  $5 \cdot 27 \cdot 6^4 = 174960$ .

*Замечание.* Цифра 0 делится на 3 ( $0 : 3 = 0$ ), поэтому в указанные числа входить не может.

Ответ: 174960.