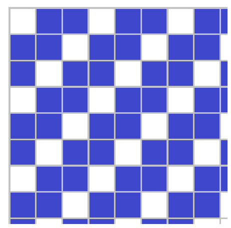
Задачи для 11 класса

1. Каждая клетка доски 1000×1000 покрашена в синий или белый цвет. Назовём клетку равновесной, если среди её соседей поровну синих и белых. Можно ли раскрасить доску так, чтобы на ней было более 600000 синих равновесных клеток? (Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону.)

   Решение. Можно. На рисунке показано, как сделать синими равновесными примерно 2/3 клеток доски.

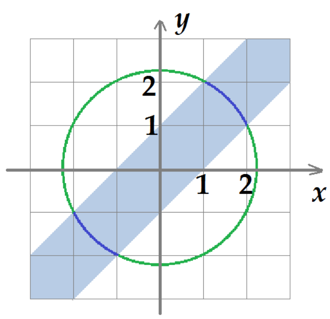


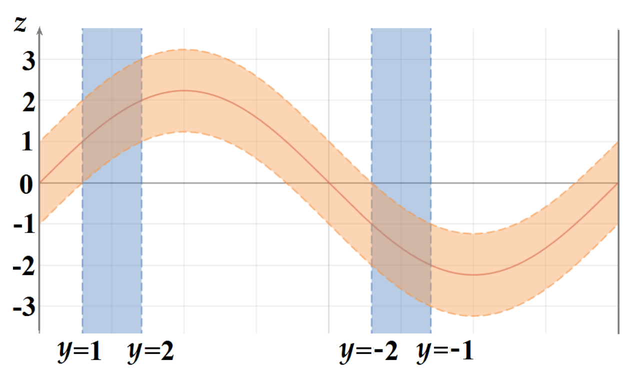
Более точный подсчёт: в каждой строке (кроме первой и последней) все синие клетки, кроме двух крайних, являются равновесными. Имеем 998 строк, в каждой из которых не менее 664 равновесных клеток. $998 \cdot 664 > 600000$.

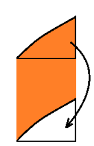
2. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.
   Решение: см. задачу 10.3.

3. В трёхмерном пространстве задана стандартная система координат. Найдите площадь множества точек удовлетворяющих следующим условиям: $x^2 + y^2 = 5,\ |x - y| < 1,\ |y - z| < 1.$

   Решение. Построим множество точек в плоскости xy, удовлетворяющее первым двум условиям (которые не зависят от z). Первое условие задаёт окружность, второе — полосу, их пересечение — две дуги. Длина каждой дуги равна $\sqrt{5}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1/2)$.







В трёхмерном пространстве окружность соответствует цилиндрической поверхности, а дуги — двум полосам на ней. На рисунке справа изображена развёртка этой поверхности; полосы, удовлетворяющие второму условию, закрашены синим. Область, удовлетворяющая третьему условию, показана оранжевым. Эта область — полоса ширины 2, идущая вдоль линии $z = y$. (Эта линия — синусоида; впрочем, этот факт не используется в решении.) Интересующая нас фигура — пересечение двух вертикальных полос с «синусоидальной» — состоит из двух равных частей. Площадь каждой части вдвое больше ширины синей полосы, что нетрудно установить, переставив криволинейный треугольник, как показано на последнем рисунке. А ширина синей полосы — это длина дуги, найденная ранее.

Ответ: $4\sqrt{5}(\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1/2)$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.
   Решение: см. задачу 10.4.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
   Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
   Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
   Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?
   Решение: см. задачу 10.5.