Задачи для 10 класса

1. В некотором треугольнике сумма тангенсов углов оказалась равна 2016. Оцените (хотя бы с точностью до 1 градуса) величину наибольшего из его углов.

   Решение. Один из тангенсов должен превосходить 600. Это возможно только для угла, очень близкого к 90°. Докажем, что он превосходит 89,5°. Это эквивалентно утверждению, что $\operatorname{tg} 0{,}5^\circ > 1/600$.
   Начнём с равенства $\sin 30^\circ = 1/2$. Заметим, что $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, поэтому $\sin x = \frac{\sin 2x}{2\cos x} > \frac{\sin 2x}{2}$ для острых углов. Отсюда:
   $\sin 32^\circ > 1/2$; $\sin 16^\circ > 1/4$; $\sin 8^\circ > 1/8$;
   $\sin 4^\circ > 1/16$; $\sin 2^\circ > 1/32$; $\sin 1^\circ > 1/64$;
   $\sin 0{,}5^\circ > 1/128 > 1/600$; $\operatorname{tg} 0{,}5^\circ > 1/600$.

   Итак, один из углов треугольника заключён в промежутке от 89,5 до 90 градусов. Заметим, что он может оказаться и не самым большим; но в этом случае самый большой угол меньше 90,5°. Значит, с точностью до градуса наибольший угол в любом случае равен 90°.

2. Назовём типичным любой прямоугольный параллелепипед, все размеры которого (длина, ширина и высота) различны. На какое наименьшее число типичных параллелепипедов можно разрезать куб? Не забудьте доказать, что это действительно наименьшее количество.
   Решение: см. задачу 6.4.

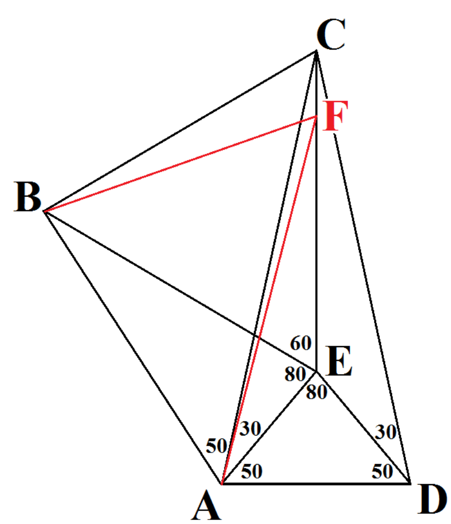
3. Найдите все натуральные числа n, для которых $2^n + n^{2016}$ — простое число.

   Решение. Рассмотрим три случая.

   - Если n чётно, то данное число тоже чётно (и больше двух при $n > 0$).
   - Если n нечётно и не делится на 3, то 2^n даёт остаток 2 от деления на 3, а $n^{2016} = (n^{504})^4$ даёт остаток 1 от деления на 3, поэтому сумма делится на 3 (и больше трёх при $n > 1$). При $n = 1$ результат равен 3, то есть является простым числом.
   - Наконец, пусть n делится на 3 (и нечётно, что не используется). Тогда число, о котором идёт речь, является суммой кубов: если $n = 3k$, то
     $2^n + n^{2016} = (2^k)^3 + (n^{672})^3 = (2^k + n^{672}) \cdot (2^{2k} - 2^k \cdot n^{672} + n^{2\cdot 672})$ — составное число (очевидно, что $1 < 2^k + n^{672} < 2^n + n^{2016}$ при $\geqslant 3$).

   Ответ: $n = 1$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ внутри треугольника ADC выбрана точка E, причём $\angle BAE = \angle BEA = 80^\circ$, $\angle CAD = \angle CDA = 80^\circ$, $\angle EAD = \angle EDA = 50^\circ$. Докажите, что $\triangle BEC$ равносторонний.



Решение.

1. Из известных углов находим: $\angle AED = 80°$, $\angle CAE = 80° - 50° = 30°$, $\angle BAC = 80° - 30° = 50°$.
2. Точки C и E равноудалены от концов отрезка AD, поэтому лежат на серединном перпендикуляре к нему. Значит, CE — ось симметрии треугольника ACD, и $\angle AEC = \angle DEC$.
3. Значит, $\angle AED + 2\angle AEC = 360°$, откуда $\angle AEC = 140°$, $\angle BEC = \angle AEC - \angle AEB = 60°$. Осталось доказать, что $BE = EC$.
4. Отметим на луче EC такую точку F, что $EF = EB$, тогда $\triangle BEF$ равносторонний.
5. $BF = BE$, $BE = BA$, поэтому $BF = BA$. Значит , $\triangle BAF$ равнобедренный. Его угол против основания равен $\angle ABF = \angle ABE + \angle EBF = 20° + 60° = 80°$, поэтому угол при основании $\angle BAE = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$.
6. Но это значит, что угол BAF совпадает с углом BAC, то есть точка F — с точкой C. Итак, $\triangle BEC$ равносторонний, что и требовалось доказать.

5. В игре «сет» участвуют всевозможные четырёхзначные числа, состоящие из цифр 1, 2, 3 (каждое число по одному разу). Говорят, что тройка чисел *образует сет*, если в каждом разряде либо все три числа содержат одну и ту же цифру, либо все три числа содержат разные цифры.
Сложностью сета будем называть количество таких разрядов, где все три цифры различны.
Например, числа 1232, 2213, 3221 образуют сет сложности 3 (в первом разряде встречаются все три цифры, во втором — только двойка, в третьем — все три цифры, в четвёртом — все три цифры); числа 1231, 1232, 1233 — сет сложности 1 (в первых трёх разрядах цифры совпадают, и только в четвёртом все цифры различны). А числа 1123, 2231, 3311 вообще не образуют сета (в последнем разряде встречаются две единицы и тройка).
Сетов какой сложности в игре больше всего и почему?

Решение. Заметим, что для любых двух чисел существует ровно один сет, в котором они встречаются. Действительно, третье число этого сета строится так: в тех разрядах, где первые два числа совпадают, третье число имеет такую же цифру; в разряде, где первые два числа различаются, третье число получает оставшуюся цифру. Например, для чисел 1231 и 1223 третьим в сете будет 1212.
Назовём «упорядоченным сетом» сет из трёх четырёхзначных чисел с учётом их порядка. Заметим, что каждый неупорядоченный сет $\{a, b, c\}$ соответствует шести упорядоченным: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Поэтому вместо количества неупорядоченных сетов можно сравнивать количество упорядоченных (их в 6 раз больше). Каждый упорядоченный сет (a, b, c) однозначно определяется упорядоченной парой чисел (a, b).
Посчитаем количество упорядоченных сетов сложности $k > 0$. Каждый такой сет может начинаться произвольным числом a (81 вариант). В этом числе нужно выбрать k разрядов (C_4^k способов выбора) и в каждом из них заменить цифру на одну из двух отличных от неё (2^k способов). В результате получим число b, которое однозначно определяет сет. Итого получаем $81 \cdot C_4^k \cdot 2^k$ упорядоченных сетов сложности k.
Сравнивая числа $f(k) = C_4^k \cdot 2^k$ для разных k, получаем: $f(1) = 8, f(2) = 24, f(3) = 32, f(4) = 16$. Как видим, наибольшее количество сетов имеет сложность $k = 3$.

Ответ: больше всего сетов сложности 3.