

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 9 класса

1. Натуральные числа a , b , c и d таковы, что $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$. Могут ли быть различными числа $a^{2015} + b^{2015}$ и $c^{2015} + d^{2015}$?
2. Один из концов отрезка закрасили в синий цвет, а другой — в красный. Внутри отрезка выбрали 2015 точек и каждую из них произвольным образом закрасили в какой-то из этих же цветов. В результате отрезок разбился на 2016 частей. Может ли количество таких частей, у которых оба конца красные, равняться количеству частей, у которых оба конца синие?
3. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ выбраны соответственно такие точки M и P , что $AM = CP$. Окружность на диаметре DP пересекает отрезок CM в точке K . Докажите, что MK и BK перпендикулярны.
4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через p обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать p ?
5. В плоском мире есть два острова, которые имеют форму выпуклых многоугольников. Прибрежными водами каждого острова считается часть моря, удалённая от берега не более чем на 50 км. Может ли случиться, что периметр первого острова больше, чем второго, а площадь прибрежных вод у второго острова больше, чем у первого? Считайте, что ближайшая к каждому острову суша находится на расстоянии больше 50 км.
6. Марк задумал число m и нашёл число k диагоналей у выпуклого m -угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число k и предложил ему найти m . Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого k -угольника. Их оказалось 2015. Найдите m .