

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 8 класса

1. Докажите, что для любого $n > 3$ существует n -угольник, у которого никакие две диагонали не параллельны.
2. BK — биссектриса треугольника ABC . Известно, что $AB = AC$, а $BC = AK + BK$. Найдите углы треугольника ABC .
3. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?
4. Даны 15 составных чисел, не превосходящих 2014. Докажите, что какие-то два из них имеют общий делитель, больший 1.
5. Дан квадрат 100×100 без угловой клетки. Можно ли разрезать его по клеткам на 33 фигуры, у которых одинаковые площади и одинаковые периметры?
6. В шестизначном числе поставили знак умножения после первых трёх цифр, и оказалось, что произведение двух полученных трёхзначных чисел в 7 раз меньше исходного числа. Какое число было написано?
7. Есть набор из N^2 карточек, на каждой карточке с одной стороны написано число, с другой стороны пусто. Написанные числа попарно различны. Эти карточки выложены в виде квадрата $N \times N$ пустой стороной (рубашкой) вверх. Разрешается перевернуть любую карточку и тем самым узнать написанное на ней число. Доказать, что не более чем за $8N$ переворачиваний можно найти карточку, число на которой меньше, чем число на каждой из соседних с ней (по стороне) карточек.
8. Назовем натуральное число возрастающим, если цифры в его записи идут в порядке строгого возрастания (например, числа 7 и 1589 — возрастающие, а 2447 — нет). Какое наименьшее количество возрастающих чисел надо сложить, чтобы получить 2014?
9. Найдите все натуральные a , b и c , для которых $2^a - 2^b - 2^{b+c} = 2014$.
10. В треугольнике ABC углы B и C равны 30° и 105° , а P — середина стороны BC . Найдите угол BAP .