

Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2014/2015 год. Второй тур

Задачи для 11 класса

1. Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  таковы, что  $2015^a + 2015^b = 2015^c + 2015^d$ . Могут ли быть различными числа  $a^{2015} + b^{2015}$  и  $c^{2015} + d^{2015}$ ?
2. Сколько пятизначных чисел делятся на свою последнюю цифру?
3. Точки  $H$ ,  $K$  и  $M$  лежат соответственно на сторонах  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , в котором  $AH$  является высотой. Докажите, что  $AH$  служит биссектрисой угла  $KHM$  тогда и только тогда, когда  $AH$ ,  $BK$  и  $CM$  пересекаются в одной точке.
4. Даны 10 последовательных целых чисел, превосходящих 1. Каждое из них разложили на простые множители, а через  $p$  обозначили наибольший из всех множителей. Какое наименьшее значение может принимать  $p$ ?
5. Ребро правильного тетраэдра  $ABCD$  равно 1. Через точку  $M$ , лежащую на грани  $ABC$  (но не на ребре), проведены плоскости, параллельные трём другим граням. Эти плоскости делят тетраэдр на части. Найдите сумму длин рёбер той части, которая содержит точку  $D$ .
6. Марк задумал число  $m$  и нашёл число  $k$  диагоналей у выпуклого  $m$ -угольника. Затем Марк сообщил Кириллу число  $k$  и предложил ему найти  $m$ . Перепутав вопрос, Кирилл пересчитал диагонали у выпуклого  $k$ -угольника. Их оказалось 2015. Найдите  $m$ .