Международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 11 класса

1. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроём, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоём (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?

2. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.

3. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.

4. Вещественные числа x и y таковы, что $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leqslant 0$. Докажите, что $x \geqslant -\frac{1}{6}$.

5. Маша красит клетки белой доски 10×10. Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?

6. Можно ли утверждать, что $\log_{\sqrt{a}}(a+1) + \log_{a+1}\sqrt{a} \geqslant \sqrt{6}$ при $a > 1$?

7. Докажите, что количество способов разрезать прямоугольник 200×3 на домино (прямоугольники 1×2) делится на 3.

8. Случайным образом выбираются три числа от 1 до N (возможно, совпадающие) и располагаются в порядке возрастания. С какой вероятностью они образуют арифметическую прогрессию?

9. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\sin A = \cos A_1$, $\sin B = \cos B_1$, $\sin C = \cos C_1$. Какие значения может принимать наибольший из шести углов?

10. Пусть $d(k)$ — число делителей натурального числа k, а квадратные скобки означают целую часть вещественного числа. Докажите, что числа $d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$ и $[\sqrt{n}]$ имеют одинаковую чётность.