

Международная математическая олимпиада  
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»  
2014/2015 год. Первый тур

Задачи для 10 класса

1. Выберите на каждой стороне квадрата по одной точке так, чтобы образованный ими четырёхугольник имел наименьший периметр.
2. Каждый из трёх землекопов, работая в одиночку, может вырыть траншею за целое число дней. А если ту же траншею они будут рыть все втроем, на это у них уйдёт соответственно на 2, 5 и 10 дней меньше, чем при рытье вдвоем (т.е. без первого, второго и третьего соответственно). За сколько дней может выкопать траншею самый медленный из них?
3. Андрей перемножил два последовательных натуральных числа и получил в некоторой системе счисления двузначное число, записываемое двумя последовательными цифрами, не превосходящими 9. Найдите эти цифры.
4. Костя выписал на доску 30 последовательных членов арифметической прогрессии с разностью 2061. Докажите, что в ней содержится не более 20 точных квадратов.
5. вещественные числа  $x$  и  $y$  таковы, что  $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \leq 0$ . Докажите, что  $x \geq -\frac{1}{6}$ .
6. Решите систему уравнений в целых числах:

$$\begin{cases} 2^a + 3^b = 5^b, \\ 3^a + 6^b = 9^b \end{cases}$$

7. Маша красит клетки белой доски  $10 \times 10$ . Она может покрасить любой вертикальный ряд клеток синей краской или любой горизонтальный ряд красной краской (каждый ряд красят не более одного раза). Если синяя краска ложится поверх красной, получается синяя клетка, а если красная поверх синей, то краски вступают в реакцию и обесцвечиваются, получается белая клетка. Может ли на доске оказаться 33 красных клетки?
8. В треугольнике  $ABC$  выбрана точка  $D$  на стороне  $AB$  так, что углы  $ACD$  и  $ABC$  равны. Пусть  $S$  — центр описанной окружности треугольника  $BCD$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $C$ ,  $S$  и середина  $BD$  лежат на одной окружности.
9. Треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  таковы, что  $\sin A = \cos A_1$ ,  $\sin B = \cos B_1$ ,  $\sin C = \cos C_1$ . Какие значения может принимать наибольший из шести углов?
10. Решите уравнение в простых числах:  $100q + 80 = p^3 + q^2$ .