Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Решения

По техническим причинам все изображения помещены в конце файла.

Решения задач 9 класса

1. См. решение задачи 4 для 8 класса.

2. См. решение задачи 2 для 8 класса.

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Отметим на AD такую точку Q, что $DQ = PC$. Тогда $DCPQ$ — прямоугольник.
   Значит, точки C и Q лежат на окружности с диаметром DP. Точка K лежит там же, поэтому $\angle DQK + \angle DCK = 180^\circ$.
   Угол AQK — смежный с $\angle DQK$, поэтому $\angle AQK = \angle DCK$; далее, $\angle DCK = \angle BMC$, поскольку $AB \parallel CD$. Итак, $\angle AQK = \angle BMC$.
   В то же время $\angle AQB = \angle BMC$ как углы в равных (по двум катетам) прямоугольных треугольниках AQB и BMC.
   Значит, $AQK = AQB$, т.е. K лежит на прямой BQ.
   Теперь достаточно доказать, что $BQ \perp CM$. Это следует из того, что упомянутые треугольники AQB и BMC переводятся друг в друга поворотом на 90° вокруг центра квадрата.

4. *Ответ:* 11.

   Пример: для чисел 2, 3, ..., 11, очевидно, $p = 11$.

   Оценка. Докажем, что одно из чисел должно иметь простой делитель, не меньший 11. Действительно, простые числа, меньшие 11 — это 2, 3, 5 и 7. Из десяти последовательных чисел пять нечётны. Однако среди пяти последовательных нечётных чисел не более двух кратны 3, одно кратно 5 и не более одного кратного 7. Значит, по крайней мере одно из нечётных чисел не кратно ни 3, ни 5, ни 7. Поскольку оно больше 1, то должно иметь какой-то делитель, больший 7.

5. *См. рисунок в конце файла.*

   Ответ: нет, это невозможно.

   Решение. Прибрежные воды n-угольного острова состоят из n прямоугольных полос вдоль берегов и n секторов круга с радиусом 50 км.

   Заметим, что угол в каждом секторе круга равен $180^\circ - \alpha$, где α — соответствующий угол многоугольника, т.е. равен его внешнему углу. Поэтому суммарная градусная мера углов при секторах равна сумме внешних углов многоугольника, которая составляет 360° независимо от числа сторон. Таким образом, эти сектора вместе составляют круг, площадь которого постоянна.

   Суммарная площадь полос равна периметру многоугольника, умноженному на 50 км. Поэтому при равных периметрах эта площадь одинакова, а при увеличении периметра она возрастает. То же верно и для общей площади.

6. См. решение задачи 6 для 8 класса.

Рисунки к геометрическим задачам

Рисунок к задаче 7.3 (8.3)

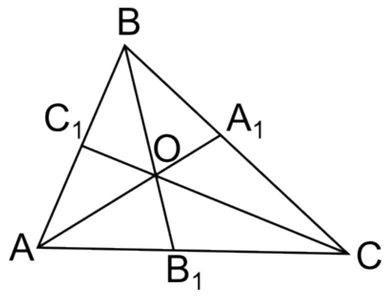


Рисунок к задаче 9.3

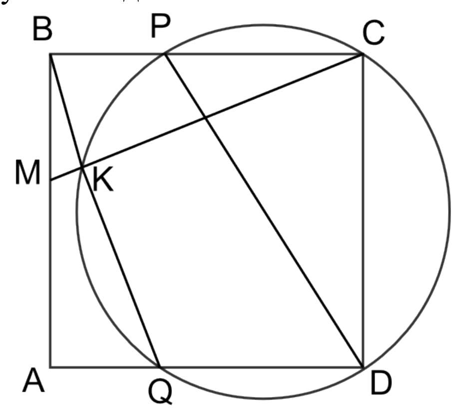
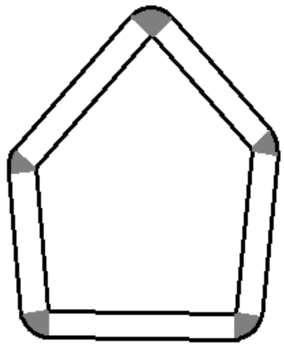
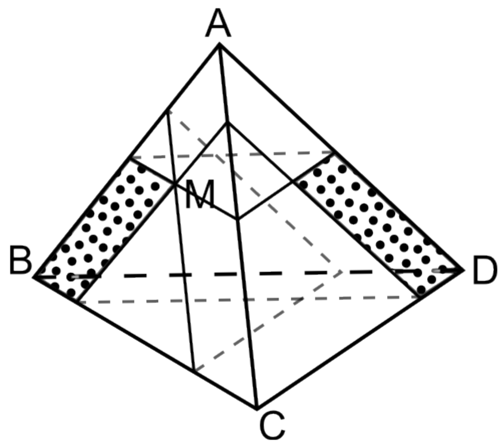


Рисунок к задаче 9.5



Рисунки к задаче 11.5



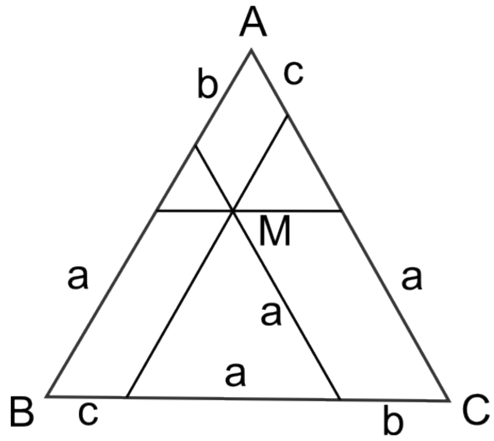


Рисунок к задаче 10.3 (11.3)