Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Решения

По техническим причинам все изображения помещены в конце файла.

Решения задач 8 класса

1. Поскольку слог состоит из двух разных букв, то одинаковые буквы могут появиться только на стыке слогов.

   Найдём сначала количество комбинаций из двух слогов с совпадающей буквой на стыке. Такие слоги (с точки зрения расположения гласных и согласных) имеют вид либо АММО ($3 \cdot 8 \cdot 3$ вариантов), либо МААН ($8 \cdot 3 \cdot 8$ вариантов), итого 264 варианта.

   Получить из каждой такой комбинации забавное слово можно двумя способами — добавить произвольный слог либо в начало, либо в конец. Поскольку в языке 48 слогов ($8 \ldots 3 = 24$ слога вида МА и ещё 24 слога вида АМ), то каждый из этих способов даёт $264 \cdot 48$ слов.

   При этом некоторые слова учтены дважды. Это слова, в которых совпадают и буквы на стыке первого слога со вторым, и буквы на стыке второго с третьим. Очевидно, все такие слова имеют вид АММООН или МААННО, и их количество равно $3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = 2 \cdot 24^2$.

   Ответ: $2 \cdot 264 \cdot 48 - 2 \cdot 24^2 = 24192$ забавных слов.

2. Ответ: не может.

   Решение. Заметим, что количество частей, у которых концы разного цвета, нечётно. Действительно, это количество равно количеству перемен цвета в последовательности точек, а количество перемен цвета нечётно, поскольку цвета начальной и конечной точек не совпадают.

   Поскольку всего частей 2016, и из них нечётное количество имеет концы разных цветов, то число отрезков с концами одинакового цвета тоже нечётно. Поэтому отрезков с обоими синими концами и отрезков с обоими красными концами не может быть поровну.

3. См. решение задачи 3 для 7 класса.

4. Ответ: не могут.
   Решение. Не умаляя общности, можно считать, что $a \geq b$ и $c \geq d$. Заметим, что тогда $a = c$, в противном случае имеем:

   $$2015^a + 2015^b > 2015^a > 2015^{a-1} + 2015^{a-1} \geq 2015^c + 2015^d.$$

   Значит, $2015^b = 2015^d$, откуда $b = d$. Теперь очевидно, что

   $$a^{2015} + b^{2015} = c^{2015} + d^{2015}.$$

5. См. решение задачи 5 для 7 класса.

6. Обозначим число диагоналей в выпуклом n-угольнике через $d(n)$. Тогда задача переформулируется так: найти m, если $d(m) = k$, а $d(k) = 2015$.

   Найдём формулу для $d(n)$ (впрочем, достаточно широко известную).
   Заметим, что из каждой вершины выходят диагонали во все вершины, кроме неё и двух соседних, т.е. $n - 3$ диагонали. Тогда общее количество диагоналей должно быть $n(n-3)$ (n вершин и по $n - 3$ диагонали из каждой). Но в этом случае каждая диагональ будет посчитана дважды (для каждой из двух вершин, которые она соединяет). Поэтому на самом деле диагоналей вдвое меньше: $d(n) = (n(n-3))/2$.

   Итак, $k(k-3)/2 = 2015$, откуда $k^2 - 3k - 4030 = 0$, что для положительного k даёт
   $k = (3 + \sqrt{16129})/2 = (3 + 127)/2 = 65$;

   $m(m-3)/2 = 65$, откуда $m^2 - 3m - 130 = 0$, что для положительного m даёт
   $m = (3 + \sqrt{529})/2 = (3 + 23)/2 = 13$.

   Ответ: $m = 13$.

Рисунки к геометрическим задачам

Рисунок к задаче 7.3 (8.3)

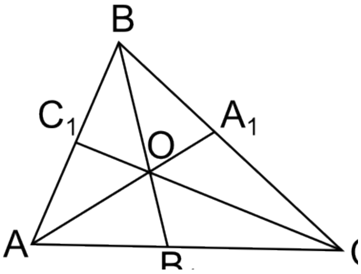


Рисунок к задаче 9.3

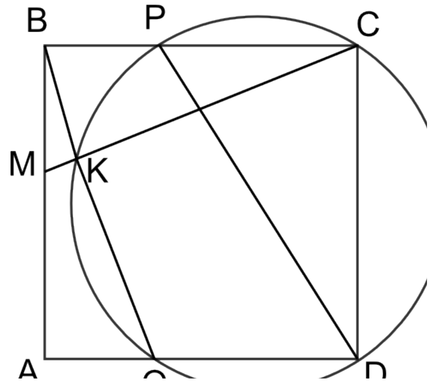
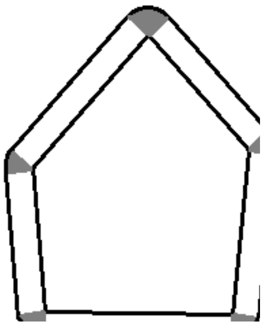
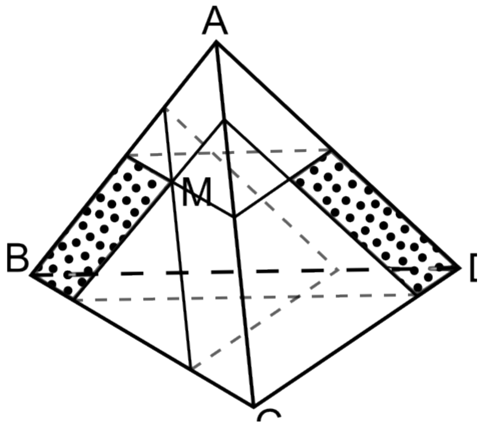


Рисунок к задаче 9.5



Рисунки к задаче 11.5



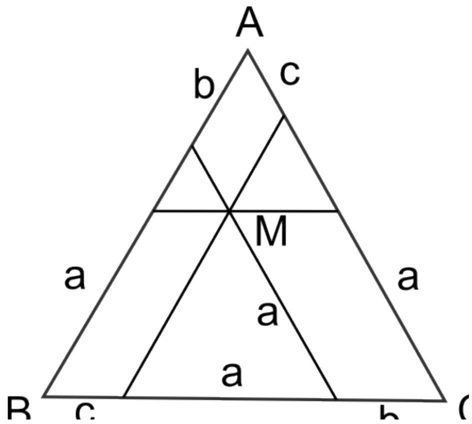


Рисунок к задаче 10.3 (11.3)