Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Решения

По техническим причинам все изображения помещены в конце файла.

Решения задач 7 класса

1. Поскольку слог состоит из двух разных букв, то одинаковые буквы могут появиться только на стыке слогов.

   Найдём сначала количество комбинаций из двух слогов с совпадающей буквой на стыке. Такие слоги (с точки зрения расположения гласных и согласных) имеют вид либо АММО ($3 \cdot 7 \cdot 3$ вариантов), либо МААН ($7 \cdot 3 \cdot 7$ вариантов), итого 210 вариантов.

   Получить из каждой такой комбинации забавное слово можно двумя способами — добавить произвольный слог либо в начало, либо в конец. Поскольку в языке 42 слога ($7 \ldots 3 = 21$ слог вида МА и ещё 21 слог вида АМ), то каждый из этих способов даёт $210 \cdot 42$ слов.

   При этом некоторые слова учтены дважды. Это слова, в которых совпадают и буквы на стыке первого слога со вторым, и буквы на стыке второго с третьим. Очевидно, все такие слова имеют вид АММООН или МААННО, и их количество равно $3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 2 \cdot 21^2$.

   Ответ: $2 \cdot 210 \cdot 42 - 2 \cdot 21^2 = 16758$ забавных слов.

2. Разложим 2015 на множители: $2015 = 13 \cdot 31 \cdot 5$. Теперь легко найти подходящие числа: $a = 1, b = 3$ (или наоборот).

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Как известно, медианы треугольника пересекаются в одной точке. Проведём третью медиану CC_1, проходящую через O. Заметим, что оба угла AOC и BOC равны $120°$ независимо от того, какие именно стороны треугольника ABC равны.
   Действительно, если $AC = BC$, то CO — биссектриса угла ACB, поэтому $\triangle AOC = \triangle BOC$, и $\angle AOC = \frac{360° - 120°}{2} = 120°$.
   Если же $AB = AC$, то по тем же соображениям $\angle AOC = \angle AOB = 120°$, так что угол BOC также равен $120°$.

   Итак, все три угла $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$ равны $120°$. Из этого можно вывести равенство любых двух сторон.
   Докажем, например, что $AB = AC$. Действительно, OA_1 — биссектриса и медиана $\triangle BOC$, поэтому это и его высота. Значит, AA_1 – высота и медиана $\triangle ABC$, поэтому в нём $AB = AC$, что и требовалось доказать.

4. *Ответ:* 7 команд.

   Пример. В турнире участвуют команды с номерами от 1 до 7; бои таковы: 124, 235, 346, 457, 561, 672, 713.

   Оценка. Пусть в одном из боёв команда 1 играет с командой 2 и командой 3. Поскольку это не единственный бой, то есть ещё команды, и с ними тоже должна играть команда 1. Значит, ещё в каком-то бою она играет с двумя другими командами, назовём их 4 и 5. Итак, среди проведённых боёв есть 123 и 145.

Предположим, что в турнире всего 5 команд. Тогда команда 2, кроме боя с командами 1 и 3, должна участвовать ещё в одном бою. Это может быть только бой с командами 4 и 5. Но эти команды уже встречались в одном бою (145). Значит, пяти команд недостаточно.

Тогда команда 1, кроме боёв 123 и 145, должна участвовать ещё хотя бы в одном бою с двумя новыми соперниками, назовём их командами 6 и 7. Значит, в турнире участвуют не менее семи команд.

5. *Ответ:* нет, это невозможно.

   Решение. Прибрежные воды состоят из трёх прямоугольных полос вдоль берегов и трёх секторов круга с радиусом 50 км.

   Заметим, что угол в каждом секторе круга равен $180° - \alpha$, где α — соответствующий угол треугольника, т.е. равен внешнему углу треугольника. Поэтому суммарная градусная мера углов при секторах равна сумме внешних углов треугольника, а именно 360°. Таким образом, эти три сектора вместе составляют круг, площадь которого постоянна.

   Суммарная площадь полос равна периметру треугольника, умноженному на 50 км. Поэтому при равных периметрах эта площадь одинакова, а при увеличении периметра она возрастает. То же верно и для общей площади.

6. *Ответ:* выигрывает второй. Его стратегия описана ниже.

   Второй будет стирать объекты того же типа, что и первый предшествующим ходом (т.е. на стирание сторон будет отвечать стиранием сторон, а на стирание диагоналей — стиранием диагоналей). Поэтому игра распадается на две (игра на сторонах и игра на диагоналях), и достаточно понять, как второй побеждает в каждой из этих игр.

   Игра на сторонах. Первый игрок своим первым ходом стирает несколько соседних сторон. Второй должен стереть несколько диаметрально противоположных сторон так, чтобы осталось две части по одинаковому количеству сторон (это всегда можно сделать: второй стирает одну или две стороны в зависимости от того, чётное или нечётное количество сторон стёр первый). После этого второй симметрично повторяет ходы первого, сделанные им на сторонах: если первый стирает несколько сторон в одной части, то второй стирает аналогичные стороны в другой части.

   Игра на диагоналях. Ход игры зависит только от общего количества диагоналей. Посчитаем это количество. Заметим, что из каждой вершины выходят диагонали во все вершины, кроме неё и двух соседних, т.е. 2012 диагоналей. Тогда общее количество диагоналей должно быть $2015 \cdot 2012$. Но в этом случае каждая диагональ будет посчитана дважды (для каждой из двух вершин, которые она соединяет). Поэтому на самом деле диагоналей вдвое меньше, то есть $2015 \cdot 2012 : 2 = 2015 \cdot 1006 = 4030 \cdot 503$.
   Нам важно только то, что количество диагоналей делится на 10. Поэтому второй должен играть так, чтобы после его хода количество диагоналей делилось на 10 (если первый стёр одну диагональ, то второй стирает девять, если первый стёр две, то второй — восемь и т.д.).

Рисунки к геометрическим задачам

Рисунок к задаче 7.3 (8.3)

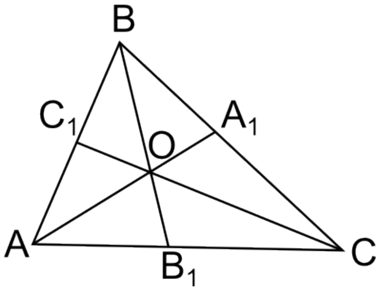


Рисунок к задаче 9.3

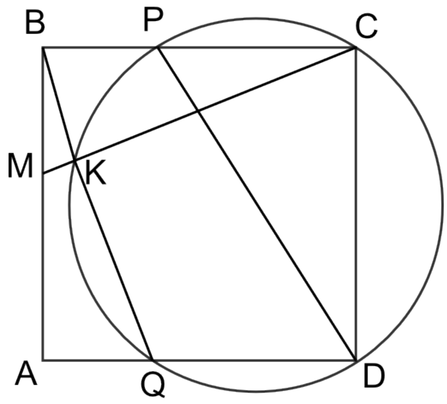
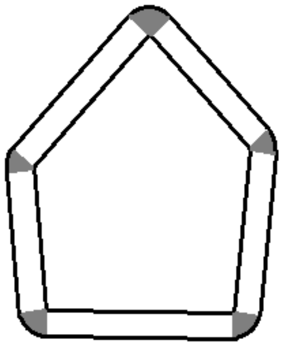


Рисунок к задаче 9.5



Рисунки к задаче 11.5

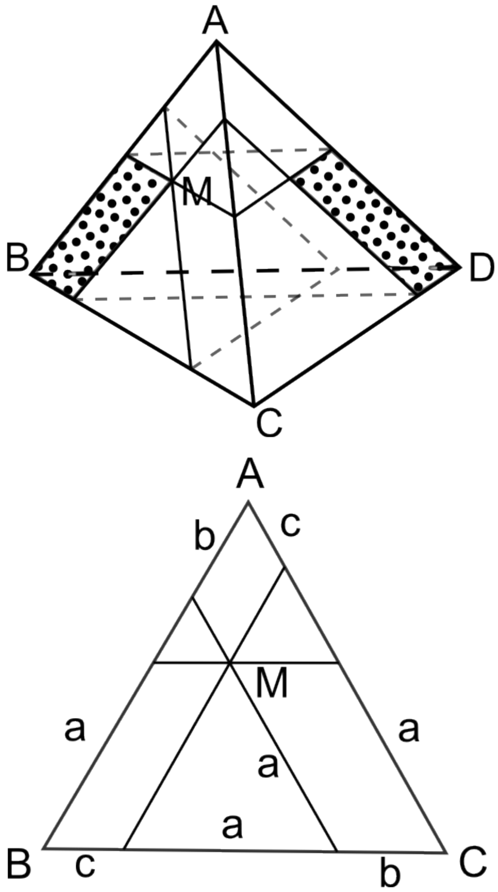


Рисунок к задаче 10.3 (11.3)