Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

2014/2015 год. Второй тур

Решения

По техническим причинам все изображения помещены в конце файла.

Решения задач 10 класса

1. См. решение задачи 4 для 8 класса.

2. Общее количество пятизначных чисел — $99999 - 9999 = 90000$, и среди них поровну чисел с последней цифрой 0, 1, ..., 9, то есть по 9000 чисел каждого типа.

   Обозначим через n_i, где $i = 0, 1, ..., 9$, количество чисел с последней цифрой i, кратных i. Тогда
   $n_0 = 0$ (число не может делиться на 0);
   $n_1 = 9000$ (все числа делятся на 1);
   $n_2 = 9000$ и $n_5 = 9000$ по признакам делимости на 2 и 5.

   Найдём n_3. Число $\overline{abcd3} \vdots 3$, если $\overline{abcd0} \vdots 3$, т.е. $10 \cdot \overline{abcd} \vdots 3$, а это равносильно $\overline{abcd} \vdots 3$ (поскольку 3 и 10 взаимно просты). Таким образом, надо найти количество четырёхзначных чисел, кратных тройке. Поскольку четырёхзначных чисел 9000 и из каждых трёх подряд идущих ровно одно кратно 3, то $n_3 = 9000 : 3 = 3000$.
   Аналогично n_9 равно количеству четырёхзначных чисел, кратных 9, т.е. $n_9 = 9000 : 9 = 1000$.
   Аналогично n_7 равно количеству четырёхзначных чисел, кратных 7. Наименьшее из них равно $7 \cdot 143 = 1001$, наибольшее $7 \cdot 1428 = 9996$, поэтому $n_7 = 1428 - 143 + 1 = 1286$.

   Теперь найдём n_4. Число $\overline{abcd4} \vdots 4 \Leftrightarrow 4 + 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 2 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 2$. Значит, n_4 равно количеству чётных четырёхзначных чисел, которое составляет половину от общего количества четырёхзначных чисел. $n_4 = 9000/2 = 4500$.

   Аналогично $\overline{abcd6} \vdots 6 \Leftrightarrow \overline{abcd0} \vdots 6 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 6 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 3 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 3$, так что $n_6 = 9000 : 3 = 3000$;

   $\overline{abcd8} \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{abcd0} \vdots 8 \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{abcd} \vdots 8 \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{abcd} \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{abcd} \vdots 4$, и $n_8 = 9000 : 4 = 2250$.

   Общее количество интересующих нас чисел равно

   $$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 0 + 9000 + 9000 + 3000 + 4500 + 9000 + 3000 + 1286 + 2250 + 1000 = 42036.$$

3. *См. рисунок в конце файла.*

   Мы будем пользоваться теоремой Чевы, которая гласит, что отрезки AH, BK и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

   $$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1.$$

   Введём обозначения: $\angle MHA = \alpha_1, \angle KHA = \alpha_2, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$.

   По теореме синусов для $\triangle AMH$,

   $$\frac{AM}{MH} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin MAH} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \beta};$$

по теореме синусов для $\triangle MHB$,

$$\frac{MH}{MB} = \frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - \alpha_1)} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha_1}.$$

Поэтому

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{MH} \cdot \frac{MH}{MB} = \tan\alpha_1 \cdot \tan\beta.$$

Аналогично

$$\frac{AK}{KC} = \tan\alpha_2 \cdot \tan\gamma.$$

Наконец,

$$\frac{CH}{HB} = \frac{AH\cot\gamma}{AH\cot\beta} = \frac{\cot\gamma}{\cot\beta}.$$

Перемножим три последних равенства:

$$\frac{AK}{KC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BM}{MA} = \tan\alpha_2 \cdot \tan\gamma \cdot \frac{\cot\gamma}{\cot\beta} \cdot \frac{1}{\tan\alpha_1 \cdot \tan\beta} = \frac{\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1}.$$

Как видим, это выражение равно единице (т.е. три отрезка пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$.

4. См. решение задачи 4 для 9 класса.

5. См. решение задачи 5 для 9 класса.

6. См. решение задачи 6 для 8 класса.

d

Рисунки к геометрическим задачам

Рисунок к задаче 7.3 (8.3)

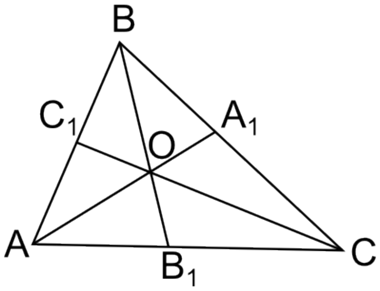


Рисунок к задаче 9.3

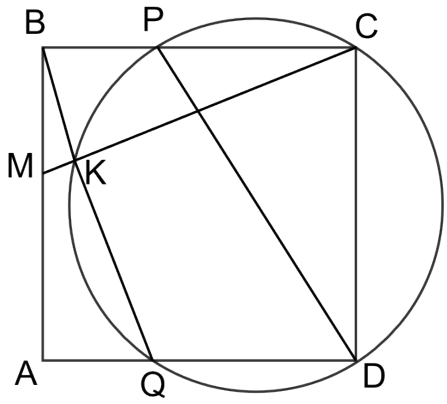
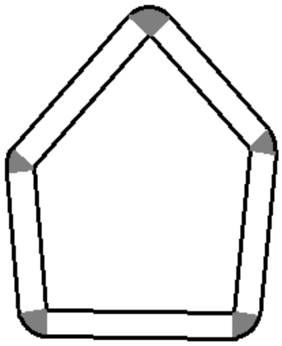
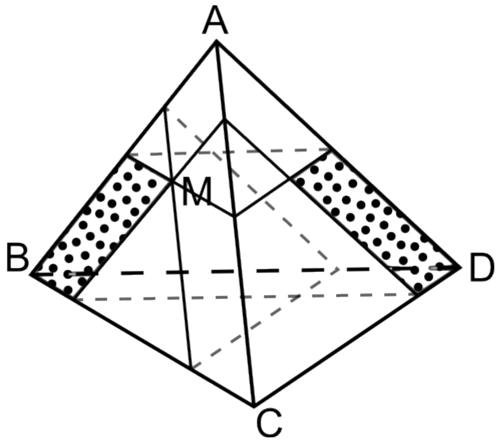


Рисунок к задаче 9.5



Рисунки к задаче 11.5



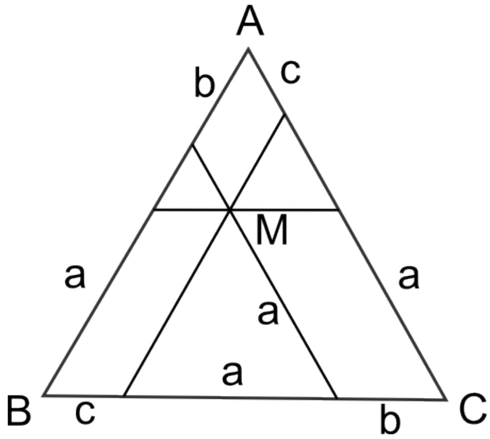


Рисунок к задаче 10.3 (11.3)