

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2013/14 год

Задачи 1 тура, 10 класс

1. Назовём год лихим, если в записи его номера есть одинаковые цифры. Например, все годы с 1988 по 2012 были лихими. Докажите, что в каждом столетии, начиная с двадцать первого, хотя бы 44 лихих года.

2. Азимут называется угол от 0 до 360° , отсчитанный по часовой стрелке от направления на север до направления на нужный ориентир. Алекс видит телебашню под азимутом 60° , водонапорную башню под азимутом 90° , а колокольню под азимутом 120° . Для Бориса те же азимуты соответственно равны 270° , 240° и X . Какие значения может принимать X ?

3. Назовём основание системы счисления комфортным, если существует простое число, запись которого в этой системе счисления ровно по одному разу содержит каждую из её цифр. Например, 3 — комфортное основание, так как троичное число 102 — простое. Найдите все комфортные основания, не превосходящие 12.

4. У Кости есть n одинаковых кубиков. У каждого кубика на двух противоположных гранях написаны числа 5 и 6, а на остальных — 1, 2, 3 и 4 (именно в этом порядке по кругу). Костя склеил из этих кубиков столбик — параллелепипед $1 \times 1 \times n$ — и покрыл лаком все шесть граней этого столбика. После этого он расклеил кубики и обнаружил, что сумма чисел на покрытых лаком гранях меньше, чем на остальных. При каком наименьшем n такое могло произойти?

5. CH — высота в треугольнике ABC , а O — центр его описанной окружности. Из точки C опустили перпендикуляр на AO , а его основание обозначили через T . Наконец, через M обозначили точку пересечения HT и BC . Найдите отношение длин отрезков BM и CM .

6. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$