**Международная математическая олимпиада**
**«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»**

**2013/2014 учебный год. Второй тур**

## Решения и критерии проверки

Ниже приведены решения задач и критерии проверки. В тексте встречаются ссылки на задачи из вариантов других классов; так, «задача 5.6» означает задачу №6 для 5-го класса.

**Сроки проверки.** «Первичная» проверка должна быть в основном закончена к 10 февраля. После этого ответственные за параллель могут перепроверять работы с высокими баллами и те, которые вызвали затруднения у проверяющих.

**Оценивание работ.** Максимальный балл за каждую задачу — 7 баллов. Допускаются только целые баллы.

Рекомендуется придерживаться следующего принципа. Если задача в целом решена верно, но в решении есть мелкие ошибки или пробелы в объяснениях, то ставится 5-6 баллов. Если задача в целом не решена, но есть существенные продвижения (не просто «что-то разумное написано», а именно существенные продвижения), то ставится 1-2 балла. Если продвижения *очень* существенны (человек понял практически всё, что нужно для решения задачи, но задачу по непонятной причине не решил), то можно поставить 3 балла. В целом оценки в 3 и особенно 4 балла рекомендуется ставить как можно реже.

Частные критерии описаны после решения каждой задачи. Они устроены примерно так:

*Полное решение* – описание того, что должно быть в семибалльном решении (а что не обязательно должно быть: например, от младших мы не всегда требуем чётких доказательств, а от старших – доказательства очевидных фактов).

*Погрешности* – недостатки решения, приводящие к снятию 1-2 баллов. Если в решении допущено несколько погрешностей, то происходит «частичное суммирование»: за две погрешности по 1 баллу вычитается 2 балла, но за несколько двухбалльных погрешностей всё равно в сумме снимается два балла, в крайнем случае – три. В общем, правило о том, что «задача в целом решена – ставь хотя бы 5, в крайнем случае 4», должно соблюдаться.

*Продвижения* – указано, за какие продвижения даются баллы, если задача в целом не решена. Здесь действует аналогичное правило «частичного суммирования» с потолком в 2, изредка 3 балла.

К «продвижениям» обычно относится наличие верного числового ответа при отсутствии решения (за ответ ставится 1 балл); однако если видно, что ответ получился верным совершенно случайно из абсолютно неверных соображений, то можно ставить 0. Верно угаданный ответ вида «да/нет» баллов не приносит.

Типичная «погрешность» - арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения. За неё снимается 1-2 балла (в зависимости от сложности задачи – чем проще задача, тем дороже стоит в ней дурацкая ошибка).

Разумеется, реальность разнообразнее заранее придуманных критериев. Тем не менее, надеемся, что они помогут оценивать работы более единообразно. Обо всех спорных случаях стоит сообщать ответственному за параллель, который выступает гарантом единообразия критериев. Критерии могут уточняться в первые дни (ответственные по параллелям могут уточнять их самостоятельно и сообщать проверяющим).

**Заполнение таблицы с результатами.** Результаты проверки работ нужно внести в xls-таблицу вместе с данными из анкет. Инструкция по указанию данных приведена ниже (вам может показаться, что она слишком подробная и занудная, но она должна облегчить сведение данных в общую таблицу).

- № - не заполняется.
- Параллель, Проверяющий – ваша фамилия и параллель, которую вы проверяете.
- E-mail организатора – с какого ящика присланы письма на ящик жюри (будьте внимательны: некоторые письма переслали с других ящиков). Организатор – название организатора в произвольной форме (например, город и школа в соответствии с указанными в теме письма).
- Страна – по-русски. Регион – без сокращений и без слова «Республика», например, «Минская область», «Татарстан». Населённый пункт: «Магнитогорск», «пос. Петрово Юрьевского района» (тип населённого пункта пишем для сёл, посёлков и т.д., но не для городов; если не райцентр, указываем район).
- «Сельская местность» и «Особые права» - пункты, добавленные по требованию СПбГУ для какой-то отчётности (типа «а сколько в вашей олимпиаде участвует инвалидов, сирот и детей из сельской местности?»); если ответ отсутствует или отрицательный, ничего не писать.
- Школа – например, «школа 56», «гимназия 5 с углублённым изучением математики», «лицей «Золотая горка»» и т.д. (без аббревиатур типа «ГБОУ»; вместо «СОШ» и «ООШ» пишем «школа»; символ № не используем; «имени Пушкина» или «при ДВГУ» оставляем).
- Класс – название класса с буквой.
- Кружок – занимается ли в кружке и где (ФИО руководителя, если это кружок при школе, можно не писать).
- E-mail – для участников с совсем слабыми работами можно не указывать. Если отсутствует e-mail, можно указать вместо него телефон.
- Фамилия, имя – ясно (отчество не нужно).
- 1–6 – баллы по задачам, итого – сумма.
- Примечание – в частности, нужно отмечать подозрения на списывание. Примечания по задачам (пр.1 – пр.6) – если не уверены в оценке или в этой задаче есть что-то интересное.

**Международная математическая олимпиада**
**«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»**

**2013/2014 учебный год. Второй тур**

**Задачи для 8 класса**

**1.** Мила и Женя придумали по числу и выписали на доску все натуральные делители своих чисел. Мила написала 10 чисел, Женя — 9, а число 6 оказалось написано дважды. Сколько всего различных чисел на доске?

**Решение.** Поскольку число 6 написано дважды, то оба исходных числа (обозначим их a и b) делятся на 6.

Если Верино число имеет 10 делителей, то его разложение - либо $p^9$, либо $p^1 \cdot q^4$ (где p и q — некие простые числа); первое невозможно, поскольку оно делится на 6. Валино число имеет 9 делителей, так что его разложение — либо $s^8$, либо $s^2 \cdot t^2$; опять же возможно только второе. При этом числа p и q равны 2 и 3 в каком-то порядке, числа s и t — тоже. Легко видеть, что НОД таких чисел равен либо $2 \cdot 3^2=18$, либо $3 \cdot 2^2=12$, и в любом случае имеет $2 \cdot 3=6$ делителей. Значит, среди выписанных чисел ровно 6 повторяющихся, и количество различных чисел равно 10+9-6=13.

**Критерии.**

*Полное решение* должно содержать: (1) указание того, какой вид имеет разложение НОД, с доказательством; (2) подсчёт делителей этого НОД и получение ответа, как в задаче 7.1. Приводить пример, подтверждающий существование таких чисел, не требуется.

*Погрешности.* Человек считает только числа, которые выписаны по одному разу (и получает ответ 7) — минус балл.
Верно найдено разложение НОД, но при его подсчёте его делителей допущены 1-2 ошибки — снимаем 1-2 балла.

*Продвижения.*
Верно и обоснованно найден вид НОДа, но дальше вдруг что-то не то — можно поставить 3 балла.
Разумные попытки установить, как выглядит разложение каждого из исходных чисел — 1 балл.

*Неверные, но отчасти разумные решения.*
«Числа 1,2,3,6 написаны дважды, поэтому разных чисел 10+9-4=15» - 1 балл.
Приведён какой-нибудь пример подходящих чисел и для него найден ответ — 2 балла.

**2.** В окружности проведены три равных хорды, проходящие через одну точку. Докажите, что эти хорды являются диаметрами.

**Решение и критерии.** См. задачу 7.3.

**3.** Братья нашли клад из золота и серебра. Они разделили его так, что каждому досталось по 100 кг. Старшему досталась 1/5 всего золота и 1/7 всего серебра, а младшему — 1/7 всего золота. Какая доля серебра досталась младшему брату?

**Решение.**

1) Пусть масса золота в кладе равна z кг, а масса серебра — s кг. Старшему брату досталось z/5+s/7 кг; это меньше (z+s)/5, но больше (z+s)/7. Из этого следует,что братьев больше пяти, но меньше семи, то есть их шестеро.

2) Теперь получаем систему уравнений: z/5+s/7=100, z+s=600.
Решаем: z/5+s/7=z/6+s/6; (1/5-1/6)z=(1/6-1/7)s; z/30=s/42; z=(5/7)s.
Поскольку z+s=600, то z=250, s=350.

3) Младший брат получил 250/7 кг золота; значит, ему досталось 100-250/7=450/7 кг серебра. Доля этого серебра от всего серебра в кладе составляет 450/7:350=9/49.

Ответ: 9/49.

**Критерии.**

Если не доказано (а просто взято с потолка), что братьев ровно шесть, то задача не решена (не больше 3 баллов).

*Погрешности.* Арифметические ошибки при верном ходе решения — минус 2 балла.

*Продвижения.*
Указано, что братьев обязательно шестеро — 1 балл (если с доказательством, то 2 балла).
Найдено количество золота и серебра — можно добавить третий балл.

**4.** Три человека хотят приехать из города А в город В, расположенный в 45 километрах от А. У них есть два велосипеда. Скорость велосипедиста 15 км/ч, пешехода — 5 км/ч. За какое минимальное время они смогут добраться до В, если велосипед можно оставлять на дороге без присмотра?

**Решение.** Двое едут на велосипеде 10 километров, потом один из них оставляет велосипед у дороги и идет следующие 10 километров пешком, другой проезжает и следующие 10 километров и тоже оставляет велосипед (который потом должен подобрать первый), третий же идет пешком первые 10 километров, а остаток едет на подобранном велосипеде первого.

В любом случае они суммарно проедут 60 км, а пройдут 30. Значит, найдется хотя бы один из них, который пройдет не меньше 10 километров, а остальное проедет. Если у него это ровно 10 и 20, то получится 3 часа 20 минут, а любое увеличение 10 - только ухудшение.

**Критерии.** Полное решение состоит из двух частей: описание того, как должны ездить велосипедисты, и доказательство того, что улучшить этот результат нельзя.
Если присутствует только одна из этих частей, то задача не решена, ставим 2 балла.

**5.** Карлсон купил в буфете несколько блинов (по 25 рублей за штуку) и несколько банок мёда (по 340 рублей за штуку). Когда он сообщил Малышу, какую сумму потратил в буфете, тот сумел только на основании этой информации определить, сколько банок мёда и сколько блинов он купил. Могла ли эта сумма превысить 2000 рублей?

**Решение и критерии.** См. задачу 5.5.
Можно несколько более требовательно относиться к доказательствам, чем в пятом классе.

**6.** На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с периметром 2014, стороны которого проходят по линиям сетки. Какую наибольшую площадь он может иметь?

**Решение.** Рассмотрим сначала крайние вертикали и горизонтали. Уход с них внутрь прямоугольника не позволяет сократить периметр, но уменьшает площадь. Значит, наибольшую площадь имеет прямоугольник. Если A и B – длины его сторон, то A+B=1007.

Теперь среди различных прямоугольников с периметром 2014 ищем прямоугольник с наибольшим значением площади AB. Так как $4AB = (A+B)^2 — (A—B)^2 = 1007^2 —(A—B)^2$ , то для достижения наибольшего значения площади AB нужно выбрать A и B так, чтобы их разность была как можно меньше. Так как сумма A и B нечётна, то их нельзя взять равными. Поэтому наименьшее возможное значение $A—B=1$ . С учётом $A+B=1007$ находим $A=504$, $B=503$ и $AB=$**253512** .

**Критерии.**

*Полное решение* состоит из двух частей: (1) доказать, что прямоугольники лучше остальных фигур и (2) доказать, что лучший из прямоугольников — квадрат.

Если (1) сформулировано, но никак не доказано, то задача не решена (макс. 2 балла). Если (2) сформулировано, но не доказано, то задача решена с недочётом (5 баллов). В качестве доказательства рассматривается анализ квадратичной функции или чёткая ссылка на изопериметрическое неравенство.

*Только ответ* (или ответ с указанием, что это получается для квадрата) — 1 балл.